Mục lục

Lời cam đoan

Đồ án này là kết quả nghiên cứu, tìm hiểu của tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của ThS. Trần Ngọc Thăng tại Viện Toán ứng dụng và Tin học, Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội.

Tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm và chấp nhận mọi hình thức kỷ luật đã được quy định về nội dung đồ án này.

Sinh viên: Đào Tuấn Anh
Lớp: Kỹ Sư Tài Năng Toán Tin – Khóa 57

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

Các ký hiệu viết tắt

$\mathbb{R}^n$	không gian véc tơ n chiều
$\mathbb{R}^n_+$	tập các véc tơ không âm của không gian véc tơ n chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$q \in Q$	phần tử q thuộc tập Q
$q \notin Q$	phần tử q không thuộc tập Q
$\forall q \in Q$	với mọi phần tử x thuộc tập Q
$\exists x$	tồn tại x
$\|x\|$	giá trị tuyệt đối của $x \in \mathbb{R}^n$
$\|\|x\|\|$	chuẩn Euclide của véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$
∂Q	biên của một tập Q
EX(Q)	tập tất cả các điểm cực biên dưới của tập chuẩn đảo compact Q
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai véc tơ x và y
int$Q$	phần trong tương đối của tập Q
Vol$Q$	thể tích của tập $Q \subset \mathbb{R}^n$
$P \cup Q$	hợp của hai tập hợp P và Q
$P \cap Q$	giao của hai tập hợp P và Q
$P \setminus Q$	hiệu của hai tập hợp P và Q
$P + Q$	tổng véc tơ của hai tập hợp $P, Q \in \mathbb{R}^n$, tức là $P + Q = \{x + y \mid x \in P, y \in Q\}$
$P - Q$	hiệu véc tơ của hai tập hợp P và Q, tức là $P - Q = \{x - y \mid x \in P, y \in Q\}$
$P \subset Q$	P là một tập con thực sự của Q
$P \subseteq Q$	P là một tập con của Q
$[b, d]$	Hộp sinh bởi hai đỉnh $b, d \in \mathbb{R}^n$, được định nghĩa như sau $[b, d] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b \leq x \leq d\}$
(QMOP)	bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt
(QMP)	bài toán quy hoạch tích tựa lồi chặt

X_E	tập tất cả các nghiệm hữu hiệu của bài toán (QMOP)
X_{WE}	tập tất cả các nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP)
X_θ	tập tất cả các nghiệm hữu hiệu θ-xấp xỉ của bài toán (QMOP)
Min$Q$	tập tất cả các điểm hữu hiệu của tập Q
WMin$Q$	tập tất cả các điểm hữu hiệu yếu của tập Q
Min(Q, θ)	tập tất cả các điểm hữu hiệu θ-xấp xỉ của tập Q
WMin(Q, θ)	tập tất cả các điểm hữu hiệu yếu θ-xấp xỉ của tập Q

Các chữ viết tắt

v.đ.k.	viết tắt của cụm từ "với điều kiện"
t.ư.	viết tắt của cụm từ "tương ứng"

Lời mở đầu

Quy hoạch toán học là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong thực tế. Do nhu cầu phát sinh ở nhiều lĩnh vực, người ta phải xử lý bài toán tối ưu không chỉ đối với một mục tiêu nào đó mà cùng lúc nhiều mục tiêu khác nhau. Quy hoạch đa mục tiêu ra đời đã đáp ứng những đòi hỏi nêu trên. Từ những nền tảng đầu tiên được đặt ra bởi Pareto (1848 – 1923), việc nghiên cứu các bài toán quy hoạch đa mục tiêu đã thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu, đặc biệt phát triển mạnh mẽ từ những năm 1950 trở lại đây (xem [4], [5], [7], [14], [17], ...). Các kết quả nghiên cứu này đã đóng góp rất nhiều vào sự phát triển của nhiều ngành khoa học, sản xuất khác nhau và có nhiều ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như kinh tế, tài chính, tin học, nông nghiệp,...

Bài toán tối ưu đa mục tiêu được nghiên cứu trong đồ án này là

$$\begin{array}{ll} & \text{Min } f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))^T \\ \text{v.đ.k.} & x \in X, \end{array} \tag{QMOP}$$

trong đó $X \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi compact khác rỗng, $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p, p \geq 2$ là các hàm số tựa lồi chặt. Khi đó X được gọi là tập chấp nhận được và f được gọi là hàm véc tơ mục tiêu. Do không gian ảnh có số chiều $p \geq 2$ nên nó không có thứ tự đầy đủ, nghĩa là hai phần tử thuộc không gian ảnh không phải bao giờ cũng so sánh được với nhau. Vì vậy, thay vì được hiểu theo nghĩa nghiệm tối ưu thông thường, người ta thường sử dụng khái niệm nghiệm hữu hiệu được xác định theo thứ tự từng phần.

Do nhu cầu ứng dụng thực tế, việc nghiên cứu xây dựng các phương pháp giải hiệu quả các bài toán quy hoạch đa mục tiêu nói chung và bài toán (QMOP) nói riêng luôn là một vấn đề phức tạp được đặc biệt quan tâm và đòi nhiều công sức nghiên cứu. Đặc biệt, mô hình bài toán (QMOP) với lớp hàm mục tiêu tựa lồi chặt đã bao hàm nhiều bài toán cụ thể ứng dụng trong nhiều lĩnh vực. Tiêu biểu trong đó có thể kể đến là bài toán quy hoạch đa mục tiêu phân thức lồi, trong đó xem xét bài toán (QMOP) trong trường hợp $f_i = \dfrac{h_i}{g_i}, i = 1, \ldots, p$, với mỗi h_i là hàm lồi không âm và mỗi g_i là hàm lõm dương. Lớp hàm này bao hàm nhiều bài toán khó thường gặp phải ở nhiều lĩnh vực như kế toán, quyết định giá, tối ưu đầu tư trái phiếu... (xem [11]).

Ngay cả trong trường hợp đơn giản nhất khi f_j là các hàm tuyến tính, tập nghiệm hữu hiệu X_E và tập nghiệm hữu hiệu yếu X_{WE} của bài toán (QMOP) nói chung là tập không lồi và có cấu trúc phức tạp. Hơn nữa, khối lượng tính toán cần thiết để tìm được X_E hoặc X_{WE} bùng nổ nhanh khi kích thước của bài toán (bao gồm số chiều không gian quyết định, số chiều không gian ảnh và số lượng ràng buộc) tăng lên [5].

Vì lý do này, việc giải bài toán (QMOP) theo hướng tiếp cận trên không gian quyết định, nói cách khác là việc xác định một phần hoặc toàn bộ tập nghiệm hữu hiệu X_E hoặc tập nghiệm hữu hiệu yếu X_{WE} trở nên rất khó khăn. Do đó, nhiều thuật toán được đề xuất theo hướng tiếp cận trên không gian ảnh, có nghĩa là tìm một phần hoặc toàn bộ tập ảnh hữu hiệu $Y_E = f(X_E)$ hoặc tập ảnh hữu hiệu yếu $Y_{WE} = f(X_{WE})$. Ưu điểm của phương pháp tiếp cận này bao gồm ba điểm chính (xem [5]). Thứ nhất, không gian ảnh Y_E và Y_{WE} thường có cấu trúc đơn giản hơn không gian quyết định X_E và X_{WE}. Khối lượng tính toán cần xử lý trên không gian ảnh để tìm ra Y_E và Y_{WE} từ đó sẽ nhẹ nhàng hơn. Thứ hai, trong thực tế, người đưa ra quyết định (decision maker) thường lựa chọn nghiệm chủ yếu dựa trên không gian ảnh hơn là trên không gian quyết định. Thứ ba, nhiều điểm trên không gian quyết định có thể cho cùng một ảnh trên không gian ảnh. Do vậy, việc tiếp cận trên không gian ảnh có thể tránh được nhiều tính toán dư thừa.

Việc giải bài toán quy hoạch đa mục tiêu (QMOP) với hàm mục tiêu f tựa lồi chặt được coi là khó khăn. Điều này là do: i) Tập ảnh hữu hiệu và hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP) là tập không liên thông; ii) Ngay cả việc xác định một điểm hữu hiệu hay hữu hiệu yếu cũng rất khó khăn (xem [7]). Để giải quyết những khó khăn này, thay vì làm việc với tập ảnh Y, chúng tôi nghiên cứu một tập hữu hiệu tương đương Y^+ với những tính chất tốt hơn như là tập chuẩn, có thứ nguyên đầy đủ, tập hữu hiệu yếu của nó là tập liên thông,... Thêm vào đó, việc xác định một điểm hữu hiệu yếu cũng được chuyển về một bài toán tối ưu một mục tiêu cực tiểu hàm tựa lồi chặt trên tập lồi compact và được giải một cách hiệu quả bằng cách công cụ của quy hoạch lồi.

Bài toán quy hoạch tích tựa lồi chặt là bài toán tối ưu toàn cục có liên quan chặt chẽ đến Bài toán (QMOP), được phát biểu như sau

$$\min \prod_{j=1}^{p} f_j(x) \qquad \text{v.đ.k. } x \in X, \tag{QMP}$$

trong đó X và f_j được cho như ở Bài toán (QMOP).

Đây là một lớp bài toán tối ưu toàn cục khó và thú vị nên đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu đặc biệt. Bài toán này có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khác nhau như kinh tế tài chính, tối ưu hóa quy trình sản xuất, tối ưu danh mục đầu tư, thiết kế chip VLSI,.... Đây là bài toán NP-khó, ngay cả trong trường hợp $p = 2$, f_1, f_2 là các hàm tuyến tính và X là một tập lồi đa diện khác rỗng. Hiện tại đã có khá nhiều các giải thuật để giải bài toán (QMP). Tuy nhiên, hầu hết trong số đó chỉ xét trường hợp X là một tập lồi đa diện và hàm mục tiêu trong đó f_j là tuyến tính, một số khác xử lý với bài toán hàm mục tiêu là hàm lồi. Cho đến thời điểm hiện tại, có khá ít công trình được xây dựng để giải trong trường hợp hàm mục tiêu là phi tuyến. Chương 4 sẽ đề xuất một kỹ thuật xấp xỉ ngoài như là một ứng dụng của thuật toán Solve(QMOP) để giải bài toán (QMP) nêu trên.

Mục đích của đồ án này là nghiên cứu bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP), cùng với bài toán tối ưu toàn cục quan trọng liên quan gần gũi với bài toán (QMOP) là bài toán quy hoạch tích và đề xuất các thuật toán mới giải các bài toán này. Với đòi hỏi của ứng dụng thực tế, việc nghiên cứu và xây dựng các thuật toán nhằm giải các bài toán nói trên một cách hiệu quả luôn là vấn đề thời sự và đòi hỏi nhiều thời gian công sức.

Nội dung chính của đồ án được chia làm bốn chương, cụ thể như sau

- ◇ *Chương 1.* ***Một số khái niệm và kết quả cơ bản***. Chương này trình bày một số khái niệm cơ sở phục vụ cho việc xây dựng nội dung những chương tiếp theo. Đầu tiên, Mục 1.1 trình bày về hàm tựa lồi, hàm tựa lõm, cùng nhiều ví dụ minh họa và tính chất quan trọng. Đây là hai lớp hàm khá quen thuộc trong các lớp hàm lồi suy rộng. Tiếp theo, Mục 1.2 giới thiệu khái niệm hàm tựa lồi chặt cùng một số tính chất hữu ích của nó. Đây là lớp hàm bao quát khá rộng, là lớp hàm lồi suy rộng lớn nhất vẫn giữ được tính chất một nghiệm cực tiểu địa phương cũng là nghiệm tối ưu toàn cục. Đặc biệt, Mục 1.2 này còn đề cập đến lớp hàm phân thức, một trường hợp riêng của lớp hàm tựa lồi chặt và có nhiều ứng dụng trong thực tế. Các khái niệm về tập chuẩn, tập chuẩn đảo, đa hộp, đa hộp đảo được trình bày ở Mục 1.3 cùng nhiều tính chất thú vị liên quan.

- ◇ *Chương 2.* ***Bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP)***. Mục đích của chương này là: i) Xem xét một ví dụ trong thực tế cần giải quyết bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt. Cụ thể trong Mục 2.1 có đưa ra một ví dụ về mô hình tối ưu danh mục đầu tư trái phiếu được đề xuất bởi [11]; ii) Giới thiệu mô hình toán học của bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP) cùng một số khái niệm và kết quả cơ bản liên quan, quan trọng trong đó bao gồm các định nghĩa về điểm hữu hiệu, điểm hữu hiệu yếu, điểm hữu hiệu yếu xấp xỉ của một tập, cũng như nghiệm hữu hiệu, nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP); iii) Mục 2.3 đưa ra điều kiện nhận biết các nghiệm hữu hiệu, nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP); iv) Mục 2.4 nghiên cứu cấu trúc tập giá trị hữu hiệu và tập giá trị hữu hiệu yếu trên tập ảnh của bài toán nói trên.

◇ *Chương 3.* ***Thuật toán xấp xỉ giải bài toán (QMOP)***. Chương này đề xuất một thuật toán xấp xỉ ngoài *Solve(QMOP)* giải bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP) sử dụng đa hộp đảo trên không gian ảnh để xác định tập nghiệm hữu hiệu yếu θ-xấp xỉ của bài toán (QMOP). Việc xây dựng cơ sở lý thuyết của thuật toán và phương pháp sinh các điểm hữu hiệu trên tập ảnh được đưa ra ở Mục 3.1. Mục 3.2 trình bày chi tiết thuật toán được đề xuất để giải bài toán (QMOP). Tính chất hội tụ của thuật toán này được chứng minh ở Mục 3.3. Để chứng minh tính hiệu quả của thuật toán được đề xuất, Mục 3.4 đưa ra nhiều tính toán thử nghiệm giải số các bài toán (QMOP) cụ thể.

◇ *Chương 4.* ***Bài toán quy hoạch tích tựa lồi chặt***. Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán quy hoạch tích các hàm tựa lồi chặt trên tập lồi (QMP) và đề xuất thuật toán với kỹ thuật xấp xỉ ngoài bằng đa hộp đảo để giải một bài toán tương ứng (QMP$_Y$) trên không gian ảnh. Thuật toán này được xây dựng dựa vào mối quan hệ giữa nghiệm tối ưu của bài toán (QMP$_Y$) và tập giá trị hữu hiệu yếu Y_{WE} của bài toán (QMOP). Khi thuật toán kết thúc, ta nhận được nghiệm tối ưu của cả hai bài toán (QMP) và (QMP$_Y$). Tiếp theo, tính hội tụ của thuật toán được chứng minh. Một ví dụ số tính toán thử nghiệm được trình bày qua từng bước nhằm minh họa tính hiệu quả của thuật toán.

Các thử nghiệm tính toán trong đồ án này được cài đặt trên laptop Macbook Pro 2016 2GHz Intel Core i5, RAM 8 GB, các thuật toán được viết trên Matlab R2016a.

Đồ án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của ThS. Trần Ngọc Thăng tại Viện Toán ứng dụng và Tin học, Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội. Mặc dù đã nỗ lực hết sức, tuy nhiên trong khoảng thời gian cho phép, việc nghiên cứu và trình bày không thể tránh khỏi nhầm lẫn thiếu sót, tôi mong nhận được sự giúp đỡ đóng góp của thầy cô và bạn bè để đồ án được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, ngày 07/06/2017

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới ThS. Trần Ngọc Thăng đã tận tình hướng dẫn và nghiêm khắc chỉ bảo trong suốt quá trình thực hiện đồ án này, cũng đồng thời là người giúp tôi nhận ra và tăng thêm niềm đam mê trong nghiên cứu khoa học.

Tôi xin cảm ơn những nhận xét và góp ý quý báu của PGS. TS. Nguyễn Thị Bạch Kim trong quá trình thực hiện đồ án.

Tôi cảm ơn Viện Toán ứng dụng và Tin học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình học tập. Cảm ơn các thầy cô, gia đình và bạn bè đã động viên khích lệ giúp tôi hoàn thành đồ án này.

Sinh viên: Đào Tuấn Anh
Lớp: Kỹ Sư Tài Năng Toán Tin – Khóa 57

Chương 1

Một số khái niệm và kết quả cơ bản

Chương này của đồ án trình bày các khái niệm quan trọng và một số kết quả liên quan, nhằm phục vụ cho việc xây dựng các lý thuyết và thuật toán ở những chương sau. Cụ thể, Mục 1.1 và 1.2 giới thiệu một số lớp hàm sẽ được sử dụng trong đồ án và một số tính chất của nó. Các khái niệm về tập chuẩn, tập chuẩn đảo, đa hộp, đa hộp đảo được trình bày ở Mục 1.3.

1.1 Hàm tựa lồi và hàm tựa lõm

Định nghĩa 1.1. (Xem [16], tr. 132) Xét tập lồi $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó, hàm số liên tục h được gọi là hàm *tựa lồi* (*quasiconvex*) xác định trên S khi và chỉ khi với mọi $x^1, x^2 \in S$ và $0 \leq \lambda \leq 1$, ta có

$$h(x^1) - h(x^2) \leq 0 \Rightarrow h(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq h(x^2),$$

hay

$$h(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \max\{h(x^1), h(x^2)\}.$$

Hàm số liên tục g được gọi là hàm *tựa lõm* (*quasiconcave*) xác định trên S khi và chỉ khi $-g$ là hàm tựa lồi trên S. Theo định nghĩa này, ta cũng có g là hàm tựa lõm nếu nó thỏa mãn

$$g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \min\{g(x^1), g(x^2)\}.$$

Định nghĩa 1.2. (Xem [1], tr. 289) Với mỗi số thực $\alpha \in \mathbb{R}$, ta gọi

$$L_\alpha(h) := \{x \in S \mid h(x) \leq \alpha\}$$

là *tập mức dưới* của hàm h và

$$L^\alpha(h) := \{x \in S \mid h(x) \geq \alpha\}$$

là *tập mức trên* của hàm h.

Định lý 1.1. *(Xem Định lý 9.1.3[16], tr. 133) Xét h là một hàm số trên một tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó:*

i) h là hàm tựa lồi trên S khi và chỉ khi tập mức dưới $L_\alpha(h)$ là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;

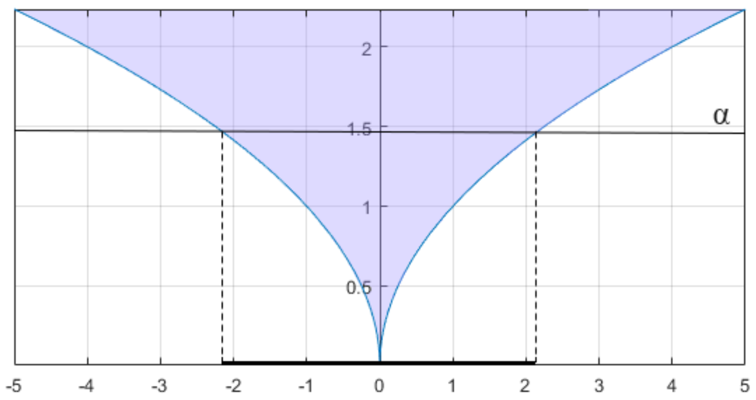
ii) h là hàm tựa lõm trên S khi và chỉ khi tập mức trên $L^\alpha(h)$ là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.1. Xét hàm số

$$h(x) = \sqrt{|x|}$$

trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Dễ thấy mọi tập mức dưới $L_\alpha(h)$ của $h(x)$ đều là tập lồi (xem Hình 1.1) nên $h(x)$ là hàm tựa lồi trên $\mathbb{R}$.

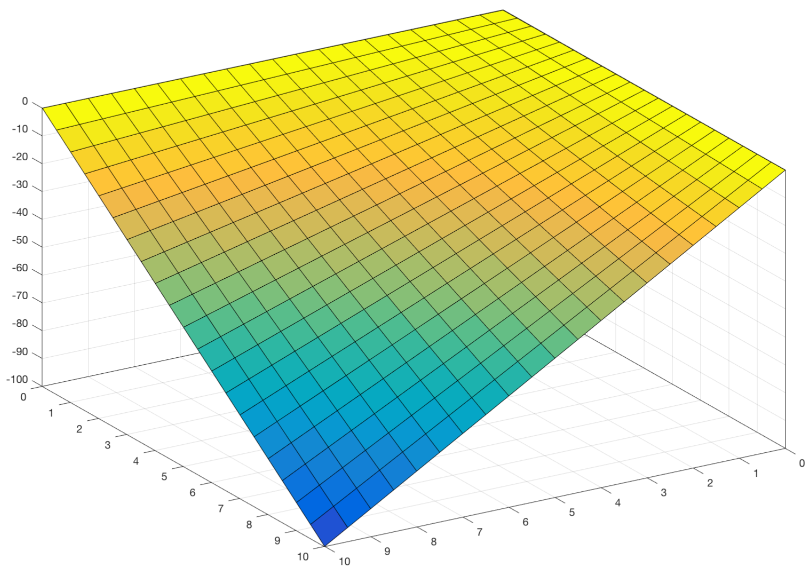


Hình 1.1: Đồ thị của hàm số $h(x) = \sqrt{|x|}$ trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.2. Xét hàm số

$$h(x, y) = -xy$$

xác định trên $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$.



Hình 1.2: Đồ thị của hàm số $h(x, y) = -xy$ trên $[0, 10]^2$.

Với α bất kỳ thuộc $\mathbb{R}$ ta có tập mức dưới của h

$L_\alpha(h) = \{(x, y) \in S \mid -xy \leq \alpha\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, xy \geq -\alpha\}$

là tập lồi. Vì vậy, $h(x,y) = -xy$ là một hàm tựa lồi trên S.

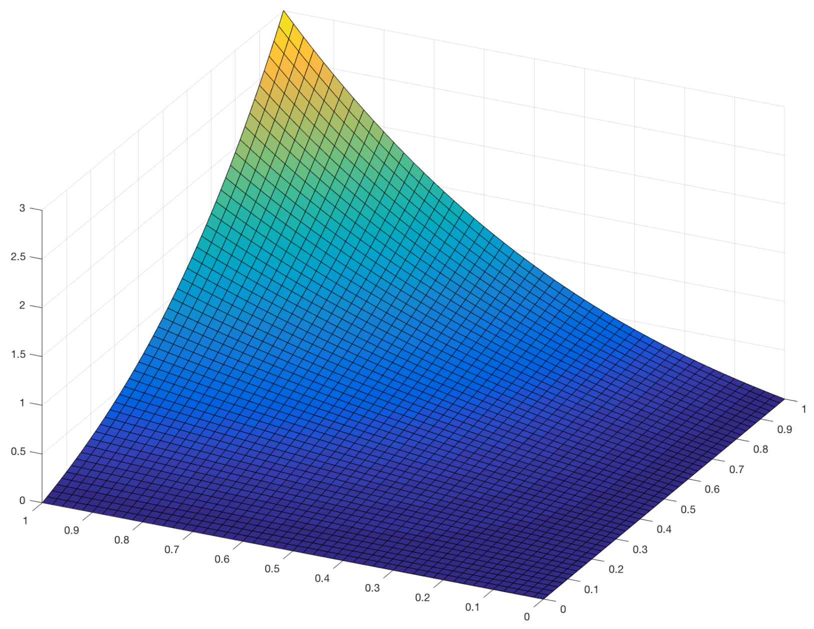
Ví dụ 1.3. Xét hàm số

$$h(x,y) = xy + x^2y^2 + x^3y^3$$

xác định trên $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$.

Đặt $g(t) = t + t^2 + t^3$ và $u(x,y) = xy$ thì $h(x,y) = g(u(x,y))$.

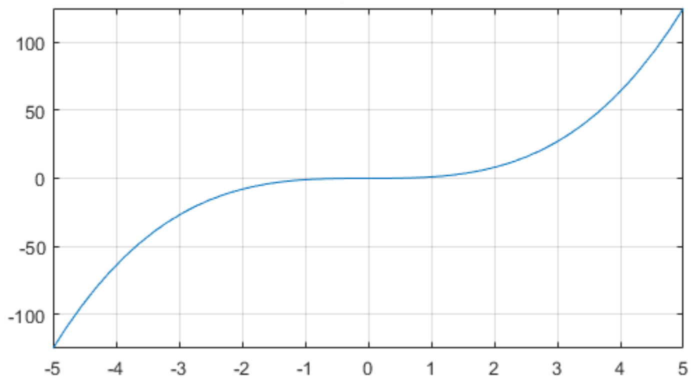
Từ Ví dụ 1.2, ta có $-xy$ là hàm tựa lồi nên $u(x,y) = xy$ là hàm tựa lõm. Do g là hàm không giảm và u là hàm tựa lõm trên S nên h là một hàm tựa lõm trên S (xem [2], tr. 57).



Hình 1.3: Đồ thị của hàm số $h(x,y) = xy + x^2y^2 + x^3y^3$ trên $[0,1]^2$.

Ví dụ 1.4. Xét hàm $h(x) = x^3$ trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Dễ thấy với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có $L_\alpha(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq \alpha\} = (-\infty, \sqrt[3]{\alpha}\,]$ và $L^\alpha(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq \alpha\} = [\sqrt[3]{\alpha}, +\infty)$ đều là những tập lồi. Do vậy, $h(x) = x^3$ vừa là hàm tựa lồi, vừa là hàm tựa lõm. Về mặt hình học, ta cũng thấy điều này rõ ràng trên Hình 1.4.



Hình 1.4: Đồ thị của hàm số $h(x) = x^3$ trên đoạn $[-5, 5]$.

1.2 Hàm tựa lồi chặt và hàm phân thức lồi

Định nghĩa 1.3. (Xem [16], tr. 137) Xét tập lồi $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó hàm số liên tục $h : S \to \mathbb{R}$ được gọi là một *hàm tựa lồi chặt (strictly quasiconvex)* khi và chỉ khi với mọi $x^1, x^2 \in S$ và $0 < \lambda < 1$, ta có

$$h(x^1) - h(x^2) < 0 \Rightarrow h(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < h(x^2).$$

Nhận xét sau đây chỉ ra mối liên hệ giữa khái niệm tựa lồi và khái niệm tựa lồi chặt.

Nhận xét.

i) Hàm số h trong Định nghĩa 1.1 được gọi là một hàm tựa lồi chặt khi các bất đẳng thức trong Định nghĩa 1.1 không xảy ra dấu "=" (như trong Định nghĩa 1.3).

ii) Cho h là một hàm tựa lồi xác định trên S.

Khi đó, h là tựa lồi chặt trên S nếu với mọi $x^1, x^2 \in S$, không tồn tại x^* nào nằm trong đoạn nối x^1, x^2 sao cho

$$h(x^*) = \max\{h(x^1), h(x^2)\}.$$

Nghĩa là không tồn tại $\lambda_0 \in (0, 1)$ nào thỏa mãn

$$h(\lambda_0 x^1 + (1 - \lambda_0)x^2) = \max\{h(x^1), h(x^2)\}.$$

Từ nhận xét này ta thấy các hàm số trong Ví dụ 1.1, Ví dụ 1.2, Ví dụ 1.3, Ví dụ 1.4 đều là các hàm tựa lồi chặt. Mệnh đề sau đây chỉ ra mối quan hệ bao hàm giữa hai lớp hàm tựa lồi chặt và tựa lồi.

Mệnh đề 1.1. *(Xem [16], tr. 139) Xét h là một hàm số được định nghĩa trên tập lồi $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Nếu h là hàm tựa lồi chặt trên S, thì h là tựa lồi trên S. Tuy nhiên, ngược lại nếu h là một hàm tựa lồi trên S thì chưa chắc nó đã là hàm tựa lồi chặt trên S.*

Ví dụ sau đây chỉ ra một hàm là tựa lồi nhưng không tựa lồi chặt.

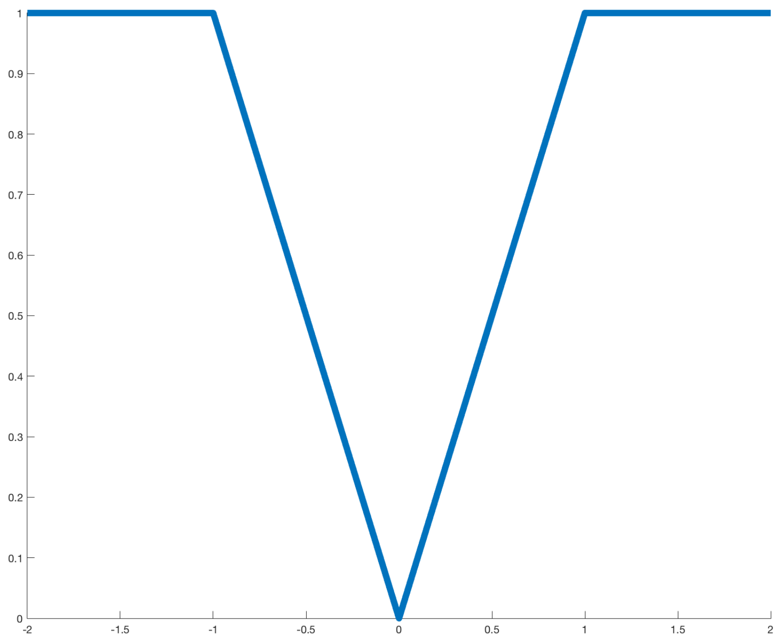
Ví dụ 1.5. Xét hàm số sau

$$h(x) = \min\{|x|, 1\}$$

xác định trên $\mathbb{R}$.

Dễ thấy mọi tập mức dưới của $h(x)$ đều là tập lồi nên nó là hàm tựa lồi. Tuy nhiên ta chỉ ra được với $x_{01} = 0, x_{02} = 2, \lambda_0 = 0.5$ thì $h(x_{02}) > h(x_{01})$ và $h(\lambda_0 x_{01} + (1 - \lambda_0)x_{02}) = h(x_{02})$. Như vậy $h(x)$ ở ví dụ này là hàm tựa lồi nhưng không tựa lồi chặt.

Đồ thị của $h(x)$ được minh họa ở Hình 1.5 dưới đây.



Hình 1.5: Đồ thị của hàm số $h(x) = \min\{|x|, 1\}$ trên đoạn $[-2, 2]$.

Mệnh đề 1.2. *(Xem [2], Bảng 5.4, Bảng 5.5 tr. 165) Xét hai hàm số f, g xác định trên tập lồi khác rỗng $S \subseteq \mathbb{R}^n$.*

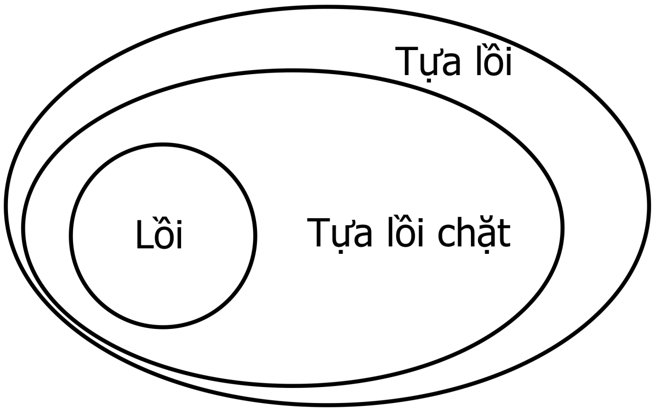
i) Nếu h là hàm lồi, g là hàm lõm trên S thỏa mãn $h(x) \geq 0$ và $g(x) > 0$ với mọi $x \in S$ thì $f = \dfrac{h}{g}$ là một hàm tựa lồi chặt trên S;

ii) Nếu h là hàm lồi, g là hàm affine trên S và $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in S$ thì $f = \dfrac{h}{g}$ là một hàm tựa lồi chặt trên S;

iii) Nếu h, g là hai hàm affine và $g \neq 0$ với mọi $x \in S$ thì $f = \dfrac{h}{g}$ là một hàm vừa tựa lồi chặt, vừa tựa lõm chặt trên S.

Hàm số f được định nghĩa ở Mệnh đề 1.2 i) được gọi là một hàm phân thức lồi trên S. Hàm số f được định nghĩa ở Mệnh đề 1.2 ii) được gọi là một hàm phân thức tuyến tính trên S.

Nhận xét. Trong Mệnh đề 1.2, chọn $g \equiv 1$. Khi đó, hàm f cũng là hàm tựa lồi chặt. Như vậy, mọi hàm lồi đều là hàm tựa lồi chặt. Hình 1.6 minh họa các mối quan hệ bao hàm giữa hàm lồi, hàm tựa lồi chặt và hàm tựa lồi.



Hình 1.6: Quan hệ bao hàm giữa các tính chất lồi, tựa lồi chặt và tựa lồi

Ví dụ 1.6. Xét hàm số $h(x,y) = \dfrac{3x-2y}{x-y+3}$ xác định trên $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \times (x,y)^T \leq b\}$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Từ Mệnh đề 1.2, ta suy ra hàm số trên là một hàm vừa tựa lồi chặt vừa tựa lõm chặt trên S.

Như đã biết, tổng của hai hàm lồi là một hàm lồi nhưng tổng của các hàm tựa lồi (t.ư., tựa lồi chặt) thì chưa chắc đã là một hàm tựa lồi (t.ư., tựa lồi chặt) (xem [16]). Tuy nhiên, với f và g là hai hàm tựa lồi chặt, nó vẫn giữ được tính chất $\max\{f, g\}$ cũng là một hàm tựa lồi chặt. Điều này được chứng minh ở Bổ đề 1.3 tiếp theo.

Mệnh đề 1.3. *(Xem [16]) Cho hai hàm số h và g xác định trên tập lồi khác rỗng $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Nếu h và g là hai hàm tựa lồi chặt thì* $\max\{h, g\}$ *cũng là hàm tựa lồi chặt trên S.*

Chứng minh. Giả sử h và g là hai hàm tựa lồi chặt trên S. Đặt $f = \max\{h, g\}$.

Xét $x, y \in S$ sao cho $f(x) < f(y)$. Khi đó, với mỗi λ bất kỳ thuộc khoảng $(0, 1)$, ta có

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \max\{h(\lambda x + (1-\lambda)y), g(\lambda x + (1-\lambda)y)\} \\ &< \max\{\max\{h(x), h(y)\}, \max\{g(x), g(y)\}\} \\ &= \max\{h(x), h(y), g(x), g(y)\} \\ &= \max\{\max\{h(x), g(x)\}, \max\{h(y), g(y)\}\} \\ &= \max\{f(x), f(y)\} = f(y). \end{aligned}$$

Vì vậy, $f = \max\{h, g\}$ cũng là một hàm tựa lồi chặt trên S. □

Định lý 1.2. *(Xem [16], tr. 139) Xét h là một hàm tựa lồi chặt xác định trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Nếu $\bar{x} \in X$ là một cực tiểu địa phương thì nó cũng là cực tiểu toàn cục của h trên X.*

Định nghĩa 1.4. Một hàm véc tơ $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)^T$, $f_i : X \to \mathbb{R}$ được gọi là một *hàm véc tơ lồi (tương ứng[1], tựa lồi, tựa lồi chặt)* trên X khi và chỉ khi từng thành phần f_i là hàm lồi (t.ư., tựa lồi, tựa lồi chặt) trên X, $i = 1, \ldots, p$.

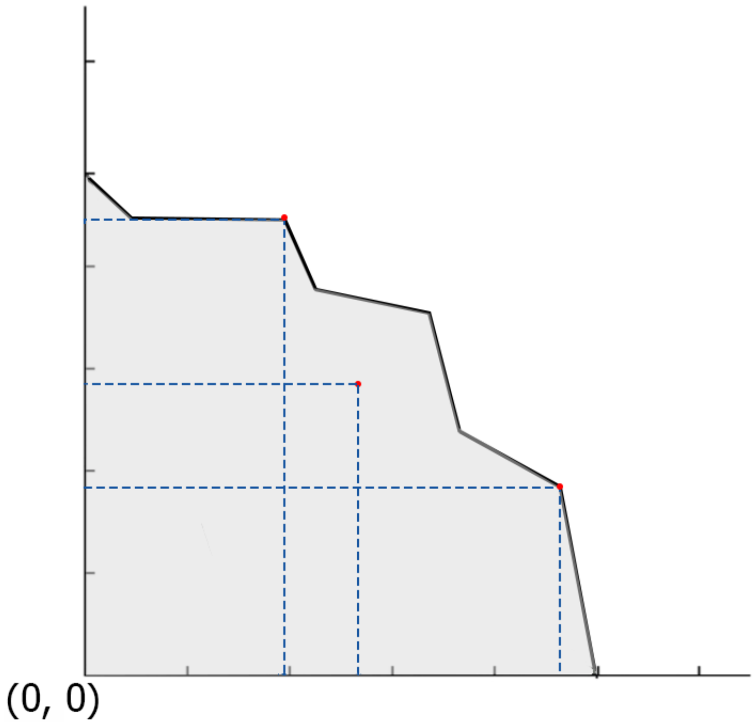
[1]Từ đây trở đi của đồ án, cụm từ "tương ứng" sẽ được viết tắt là "t.ư.".

1.3 Tập chuẩn và đa hộp

Định nghĩa 1.5. (Xem [19], tr. 467) Một tập $Q \subset \mathbb{R}^p_+$ được gọi là một *tập chuẩn (normal set)* nếu với mọi $q \in \mathbb{R}^p_+$, ta có

$$q \in Q \Rightarrow (q - \mathbb{R}^p_+) \cap \mathbb{R}^p_+ \subseteq Q.$$

Ví dụ 1.7. Từ định nghĩa trên ta thấy $\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}^p_+$ đều là các tập chuẩn. Hình 1.7 là một ví dụ khác về tập chuẩn trong trường hợp hai chiều.



Hình 1.7: Một tập chuẩn trong trường hợp hai chiều (được minh họa bằng phần màu xám).

Mệnh đề 1.4. *(Xem [19], tr. 467) Nếu Q là một tập chuẩn thì $Q \cup \{q \in \mathbb{R}^p_+ \mid q_i = 0, i \in \{1, \ldots, p\}$ nào đó$\}$ cũng là một tập chuẩn.*

Định nghĩa 1.6. (Xem [19], tr. 468) Một tập $Q \subset \mathbb{R}^p_+$ được gọi là một *tập chuẩn đảo (reverse normal set)* nếu với mọi $q \in \mathbb{R}^p_+$, ta có

$$q \in Q \Rightarrow q + \mathbb{R}^p_+ \subseteq Q.$$

Cho $0 \leq d$, $Q \subseteq [0, d]$ được gọi là một tập chuẩn đảo trong hộp $[0, d]$ nếu với mọi $q \in [0, d]$, ta có

$$q \in Q \Rightarrow (q + \mathbb{R}^p_+) \cap (d - \mathbb{R}^p_+) \subseteq Q.$$

Hình 1.8(a) là ví dụ minh họa cho một tập chuẩn đảo trong trường hợp hai chiều.

Mệnh đề 1.5. *(Xem [19], tr. 467) Cho các tập chuẩn (t.ư., tập chuẩn đảo) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Khi đó, $Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_m$ và $Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m$ cũng là các tập chuẩn (t.ư., tập chuẩn đảo).*

Định nghĩa 1.7. (Xem [18], tr. 279, [19], tr. 467) Cho một tập $Q \subset \mathbb{R}^p$. Ta gọi tập

$$N(Q) := (Q - \mathbb{R}^p_+) \cap \mathbb{R}^p_+$$

$$(\text{t.ư., } N^r_d(Q) = (Q + \mathbb{R}^p_+) \cap (d - \mathbb{R}^p_+))$$

là *bao chuẩn (normal hull)* của Q (t.ư., *bao chuẩn đảo (reverse normal hull)* của tập chuẩn đảo Q trong hộp $[0, d]$).

Khi đó, $N^r_d(Q)$ là tập chuẩn đảo nhỏ nhất chứa Q trong hộp $[0, d]$.

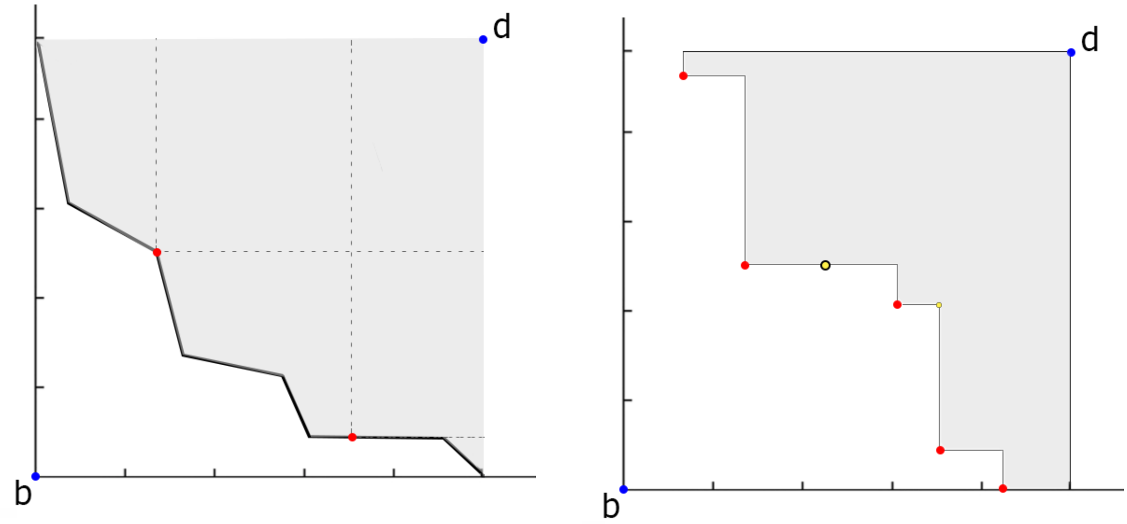
Định nghĩa 1.8. (Xem [18], tr. 279) Một điểm $q \in \mathbb{R}^p$ được gọi là một *điểm cực biên dưới (lower extreme point)* của tập chuẩn đảo compact $Q \subset \mathbb{R}^p_+$ nếu với mỗi $q' \in Q$

$$q' \leq q \Rightarrow q' = q.$$

Tập tất cả các điểm biên cực dưới của Q được ký hiệu là $EX(Q)$.

Định lý 1.3. *(Xem [18], tr. 281) Cho $f(x)$ là một hàm tăng trên tập compact Q. Khi đó, giá trị cực tiểu của hàm $f(x)$ trên Q bằng giá trị cực tiểu của nó trên $N^r_d(Q)$. Hơn nữa, giá trị cực đại đó đạt tại một điểm cực biên dưới của $N^r_d(Q)$.*

Hình 1.8: Minh họa tập chuẩn đảo và đa hộp đảo



(a) Một tập chuẩn đảo trong trường hợp hai chiều

(b) Một đa hộp đảo trong trường hợp hai chiều

Định nghĩa 1.9. (Xem [19], tr. 472) Một tập $B \subset \mathbb{R}^p$ được gọi là một *đa hộp* (t.ư., *đa hộp đảo*) trong hộp $[a, b] \subset \mathbb{R}^p$ nếu nó là hợp của các hộp $[a, z]$ (t.ư., $[z, b]$), trong đó $z \in T$ và T là một tập hữu hạn các đỉnh thuộc $[a, b]$.

Khi đó ta gọi T là tập đỉnh của đa hộp (t.ư., đa hộp đảo) B. Ta cũng nói đa hộp (t.ư., đa hộp đảo) B được sinh ra bởi T.

Hình 1.8(b) là một ví dụ của đa hộp đảo trong hộp $[b, d]$ trong trường hợp hai chiều.

Định nghĩa 1.10. (Xem [19], tr. 472) Một đỉnh $z \in T$ được gọi là một *đỉnh chính quy* của đa hộp (t.ư., đa hộp đảo) B nếu không tồn tại $z' \in T, z' \neq z$ sao cho $z' \geq z$ (t.ư., $z' \leq z$). Hiển nhiên, một đỉnh $z \in T$ được gọi là *không chính quy* khi nó không là đỉnh chính quy.

Ở ví dụ minh họa trong Hình 1.8(b), các đỉnh màu đỏ là các điểm chính quy, các đỉnh màu vàng là các đỉnh không chính quy.

Mệnh đề 1.6. *(Xem [19], tr. 472) Một đa hộp hoặc một đa hộp đảo được hoàn toàn xác định bởi các đỉnh chính quy của nó.*

Định lý 1.4. *(Xem [19], tr. 472) Cho $f(x)$ là một hàm không giảm xác định trên đa hộp (t.ư., đa hộp đảo) B. Khi đó, $f(x)$ đạt giá trị cực đại (t.ư., cực tiểu) tại một đỉnh chính quy nào đó của B.*

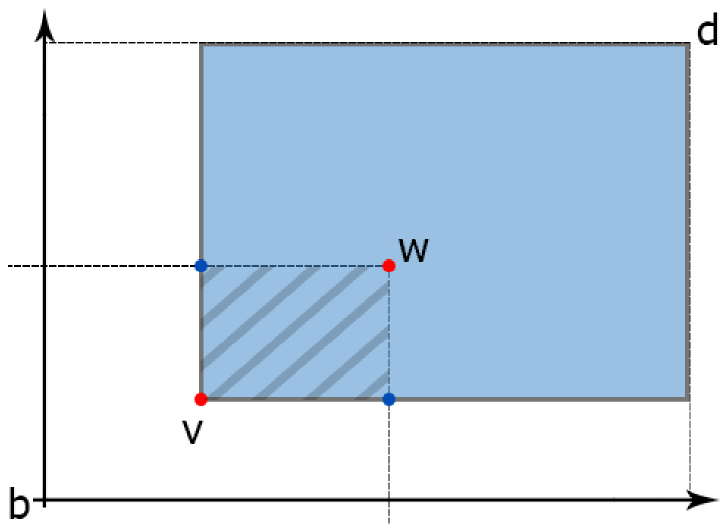
Mệnh đề 1.7. *(Xem [19], tr. 472) Mọi đa hộp đều đóng và là tập chuẩn. Giao của một số hữu hạn các đa hộp là một đa hộp.*

Mệnh đề sau đây chỉ ra cách xác định các đỉnh mới của một đa hộp đảo bằng kỹ thuật cắt đa hộp đảo được giới thiệu ở [18].

Mệnh đề 1.8. *(Xem [18], tr. 284) Xét đa hộp đảo $[v, d]$ trong hộp $[b, d] \subset \mathbb{R}^p$ và một điểm w thỏa mãn $v < w \leq d$. Khi đó, tập $Q = [v, d] \setminus (w - int\mathbb{R}^p_+)$ là một đa hộp đảo có tập đỉnh được xác định như sau*

$$z^i = v + (w_i - v_i)e^i, \quad i = 1, \ldots, p,$$

trong đó e là véc tơ đơn vị trong không gian $\mathbb{R}^p$.



Hình 1.9: Minh họa cho Mệnh đề 1.8 trong trường hợp $p = 2$.

Mệnh đề 1.9. *(Xem [18], tr. 283) Có thể xấp xỉ một tập chuẩn (t.ư., tập chuẩn đảo) bằng một đa hộp (t.ư., đa hộp đảo) với một sai số nhỏ bất kỳ.*

Kết luận. Các kết quả của tập chuẩn và đa hộp đảo sẽ được sử dụng để thiết lập và chứng minh tính hội tụ của thuật toán xấp xỉ ngoài bằng đa hộp đảo để giải bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt được trình bày ở Chương 3.

Chương 2

Bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP)

Trong chương này, đầu tiên ở Mục 2.1 ta xem xét một số ví dụ thực tế của bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP). Mô hình toán học của bài toán này cùng một số khái niệm quan trọng về điểm hữu hiệu, điểm hữu hiệu yếu, điểm hữu hiệu yếu xấp xỉ của một tập, cũng như nghiệm hữu hiệu, nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu yếu xấp xỉ được giới thiệu ở Mục 2.2. Mục 2.3 trình bày về điều kiện hữu hiệu của một điểm trên không gian quyết định. Cuối cùng, ở Mục 2.4, chúng tôi khảo sát cấu trúc tập nghiệm của bài toán (QMOP).

2.1 Ví dụ minh họa

Trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu khác nhau, người ta đã gặp phải các bài toán tối ưu đa mục tiêu với hàm mục tiêu phức tạp. Ở mục này, ta xem xét một ví dụ trong thực tế về mô hình tối ưu quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt. Ví dụ minh họa là một mô hình toán tài chính tối ưu đầu tư đa mục tiêu với các hàm mục tiêu dạng phân thức lồi (Xem [11]). Tại thời điểm đó, tác giả chưa thể tìm được nghiệm tối ưu toàn cục cho bài toán này ngay cả trong trường hợp chỉ có hai hàm mục tiêu.

Ví dụ 2.1. Ví dụ này nghiên cứu một mô hình đầu tư trái phiếu đã được đề xuất và áp dụng đối với thị trường Nhật Bản. Nói một cách ngắn gọn, *trái phiếu (bond)* thực chất là một khoản vay có kỳ hạn, trong đó nhà đầu tư trái phiếu (có thể là cá nhân hoặc tổ chức) cho nhà phát hành trái phiếu (có thể là chính phủ hoặc doanh nghiệp) vay. Khi đến kỳ hạn thanh toán, nhà phát hành trái phiếu phải hoàn trả khoản vay này (có lãi suất) cho nhà đầu tư.

Ta định nghĩa bốn tham số đặc trưng cho mỗi loại trái phiếu như sau:

c_j – lãi suất cố định của một trái phiếu loại j (đồng/trái phiếu/năm);

f_j – giá trị được bồi hoàn của trái phiếu loại j khi đến kỳ hạn thanh toán (đồng/trái phiếu);

p_j – giá thị trường bán ra của trái phiếu loại j (đồng/trái phiếu);

t_j – kỳ hạn thanh toán của trái phiếu loại j (số năm đến khi được lấy giá trị bồi hoàn).

Giả sử tại thời điểm giao dịch, nhà đầu tư đang nắm giữ u_j đơn vị cổ phiếu loại $B_j, j = 1, \ldots, N$. Trong đó, nhà đầu tư chọn lọc theo tiêu chí nào đó n_1 loại để bán. Đồng thời giả sử trên thị trường, nhà đầu tư có thể mua được tối đa U_k đơn vị trái phiếu $B'_k, k = 1, \ldots, n_2$. Khi đó, ta định nghĩa một số biến như sau:

x_j – số lượng trái phiếu B_j nhà đầu tư sẽ bán;

X_k – số lượng trái phiếu B'_k nhà đầu tư sẽ mua;

y_j – giá mà nhà đầu tư bán bán một đơn vị trái phiếu loại B_j;

Y_j – giá mà nhà đầu tư mua một đơn vị trái phiếu loại B'_k;

P_j – giá thị trường mua vào của trái phiếu loại j;

p_{j0} – giá trị sổ sách (book value) của trái phiếu loại B_j.

Và đặt

$\gamma_i = \dfrac{c_i}{p_i}$ là lợi suất trực tiếp;

$\mu_i = \dfrac{c_i + (f_i - p_i)/t_i}{p_i}$.

Từ những biến được định nghĩa trên ta có thể rút ra một vài ràng buộc trong thực tế, chẳng hạn $x_j \leq u_j, j = 1, \ldots, n_1$; $(1 - \lambda_i)p_j \leq y_j \leq (1 + \lambda_j)p_j, j = 1, \ldots, n_1$; $(1 - \lambda'_k)P_k \leq Y_k \leq (1 + \lambda'_k)P_k$.Trong đó, λ_j là một số dương nhỏ (thường nhỏ hơn 0.02 được gọi là hệ số điều chỉnh giá của một loại trái phiếu. Trong trường hợp $u_j = 0$, với mọi $j = 1, \ldots, n_1$, giao dịch tương ứng được gọi là giao dịch chỉ mua vào. Tương tự trong trường hợp $U_k = 0, k = 1, \ldots, n_2$, giao dịch tương ứng được gọi là giao dịch chỉ bán ra.

Ta định nghĩa một số chỉ số của mô hình như sau:

(i) Tổng số lượng trái phiếu của nhà đầu tư sau khi giao dịch

$$S_0 = \sum_{j=1}^{N} u_j - \sum_{j=1}^{n_1} x_j + \sum_{k=1}^{n_2} X_k;$$

(ii) Tổng giá trị của lượng trái phiếu đó tính theo giá thị trường

$$S_1 = \sum_{j=1}^{N} p_j u_j - \sum_{j=1}^{n_1} p_j x_j + \sum_{k=1}^{n_2} P_k X_k;$$

(iii) Kỳ hạn thanh toán trung bình

$$z_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N} t_j u_j - \sum_{j=1}^{n_1} t_j x_j + \sum_{k=1}^{n_2} T_k X_k}{S_0};$$

(iv) Lợi suất trực tiếp trung bình

$$z_2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} \gamma_j p_j u_j - \sum_{j=1}^{n_1} \gamma_j p_j x_j + \sum_{k=1}^{n_2} \Gamma_k P_k X_k}{S_1};$$

(v) Lợi suất trung bình tới hạn

$$z_3 = \frac{\sum_{j=1}^{N} \mu_j p_j t_j u_j - \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j p_j t_j x_j + \sum_{k=1}^{n_2} \mu'_k P_k T_k X_k}{S_2},$$

trong đó

$$S_2 = \sum_{j=1}^{N} p_j t_j u_j - \sum_{j=1}^{n_1} p_j t_j x_j + \sum_{k=1}^{n_2} P_k T_k X_k;$$

(vi) Chỉ số biến thiên giá trung bình

$$z_4 = \frac{\sum_{j=1}^{N} \pi_j u_j - \sum_{j=1}^{n_1} \pi_j x_j + \sum_{k=1}^{n_2} \pi'_k X_k}{S_0};$$

(vii) Tổng giá trị thanh toán

$$z_5 = \sum_{j=1}^{n_1} y_j x_j - \sum_{k=1}^{n_2} Y_k X_k.$$

Mục đích của việc tối ưu đầu tư này là xác định được số lượng trái phiếu cần bán và mua với mỗi loại trái phiếu, với mong muốn cực tiểu kỳ hạn thanh toán trung bình và sự biến thiên về giá, cũng đồng thời cực đại lợi suất trực tiếp trung bình và lợi suất trung bình tới hạn. Mô hình phải đáp ứng một số ràng buộc, ví dụ như tổng giá trị trái phiếu sở hữu luôn lớn hơn một lượng α nào đó, hoặc tổng giá trị thanh toán của kỳ giao dịch đó phải lớn hơn một lượng β nào đó. Trong đó, các chỉ số α và β là do người đầu tư trái phiếu quyết định. Khi đó, ta có mô hình toán học như sau

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & -z_1, z_2, z_3, -z_4 \\ \text{v.đ.k.} \quad & S_1 \geq \alpha, \\ & z_5 \geq \beta, \\ & 0 \leq x_j \leq u_j, \\ & 0 \leq X_k \leq U_k. \end{aligned}$$

Để tiện theo dõi, ta đặt

- ◇ $p_0 = \sum_{j=1}^{N} u_j$;
- ◇ $p_1 = \sum_{j=1}^{N} t_j u_j + \sum_{k=1}^{n_2} T_k X_k$;
- ◇ $p_2 = \sum_{j=1}^{N} p_j t_j u_j - \sum_{k=1}^{n_2} P_k T_k X_k$;
- ◇ $q_1 = \sum_{j=1}^{N} t_j u_j + \sum_{k=1}^{n_2} T_k X_k$;
- ◇ $q_2 = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j p_j u_j + \sum_{k=1}^{n_2} \Gamma_k P_k X_k$;
- ◇ $q_3 = \sum_{j=1}^{N} \mu_j p_j t_j u_j + \sum_{k=1}^{n_2} \mu'_k P_k T_k X_k$;
- ◇ $q_4 = \sum_{j=1}^{N} \pi_j u_j + \sum_{k=1}^{n_2} \pi'_k X_k$
- ◇ $n = n_1 + n_2$;
- ◇ x_{n_1+j} và y_{n_1+j} tương ứng là các thành phần của X_k và $Y_k, k = 1, \ldots, n_2$.

Khi đó, mô hình được viết lại thành:

$$\text{Max} \quad z_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} t_j x_j - q_1}{-\sum_{j=1}^{n_1} x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} x_j - p_0},$$

$$z_2 = \frac{-\sum_{j=1}^{n_1} \gamma_j p_j x_j + q_2}{-\sum_{j=1}^{n_1} p_j x_j + p_1},$$

$$z_3 = \frac{-\sum_{j=1}^{n_1} \mu_j p_j t_j x_j + q_3}{-\sum_{j=1}^{n_1} p_j t_j x_j + p_2},$$

$$z_4 = \frac{-\sum_{j=1}^{n_1} \pi_j x_j + q_4}{-\sum_{j=1}^{n_1} x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} x_j - p_0}$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq \alpha_{i0}, \qquad i = 1, \ldots, m_1;$$

$$\sum_{j=1}^{n} (h_{lj} + h'_{lj} y_j) x_j \geq \beta_l, \qquad l = 1, \ldots, m_2;$$

$$0 \leq x_j \leq 1, 0 \leq y_j \leq 1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Nhận xét. Dễ thấy tập chấp nhận được của bài toán này là tập lồi, các hàm mục tiêu thành phần đều có dạng phân thức lõm nên theo Mệnh đề 1.2 nó chúng là các hàm tựa lõm chặt. Vì vậy bài toán phát biểu ở trên có thể viết lại bài toán dưới dạng tối ưu cực tiểu quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt.

Ở Mục 2.2 tiếp theo, ta xem xét mô hình tổng quát của bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt.

2.2 Mô hình toán học

Xét bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt như sau

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(x) \\ \text{v.đ.k.}\quad & x \in X, \end{aligned} \tag{QMOP}$$

trong đó:

◇ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ là hàm véc tơ tựa lồi chặt;

◇ $X \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi compact khác rỗng.

Ta gọi:

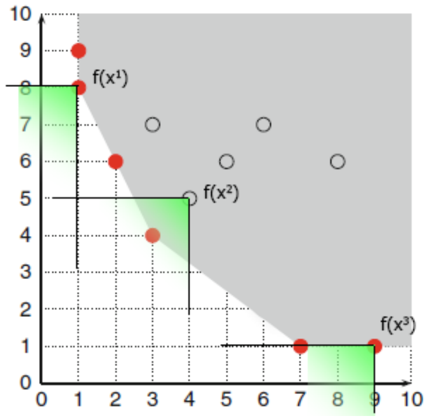
◇ X là tập chấp nhận được của bài toán (QMOP);

◇ $Y = f(X)$ là tập giá trị hay tập ảnh của của bài toán (QMOP).

Ta ký hiệu $a \geq b$ với $a, b \in \mathbb{R}^r, r \geq 2$ nếu $a_i \geq b_i, i = 1, \ldots, r$.
Ta cũng viết $a > b$ khi $a_i > b_i, i = 1, \ldots, r$.

Một phương án chấp nhận được $\bar{x}$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu (t.ư., nghiệm hữu hiệu yếu) của bài toán (QMOP) nếu không tồn tại $x \in X$ sao cho $f(\bar{x}) \geq f(x)$ và $f(\bar{x}) \neq f(x)$ (t.ư., $f(\bar{x}) > f(x)$). Tập tất cả các nghiệm hữu hiệu, hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP) được ký hiệu lần lượt là X_E và X_{WE}.

Ta gọi $Y_E = f(X_E), Y_{WE} = f(X_{WE})$ lần lượt là tập giá trị hữu hiệu và tập giá trị hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP).



Hình 2.1: Ví dụ không gian ảnh trong trường hợp hai mục tiêu. x^1 vừa là nghiệm hữu hiệu, vừa là nghiệm hữu hiệu yếu; x^2 không là nghiệm hữu hiệu hay hữu hiệu yếu; x^3 là nghiệm hữu hiệu yếu nhưng không là nghiệm hữu hiệu.

Ta ký hiệu $\mathbb{R}^p_+$ là orthant dương của $\mathbb{R}^p$ và ký hiệu $\text{int}\mathbb{R}^p_+$ là phần trong của nó. Cho tập $Q \subset \mathbb{R}^p$ khác rỗng. Ký hiệu lần lượt Min$Q$ và WMin$Q$ lần lượt là tập tất cả điểm hữu hiệu và tập tất cả các điểm hữu hiệu yếu của Q, được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} \text{Min}Q &= \{q^0 \in Q \mid (q^0 - \mathbb{R}^p_+) \cap Q = \{q^0\}\}, \\ \text{WMin}Q &= \{q^0 \in Q \mid (q^0 - \text{int}\mathbb{R}^p_+) \cap Q = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Theo cách định nghĩa này và theo định nghĩa về nghiệm hữu hiệu của bài toán (QMOP), dễ thấy

$$\text{Min}Y \equiv Y_E \text{ và } \text{WMin}Y \equiv Y_{WE}.$$

Cho một véc tơ $\theta \in \mathbb{R}^p_+$. Theo nghĩa xấp xỉ, $\bar{x}$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu yếu θ-xấp xỉ của bài toán (QMOP) khi và chỉ khi không tồn tại $x \in X$ nào sao cho $f(\bar{x}) - \theta > f(x)$. Tập tất cả các nghiệm hữu hiệu yếu θ-xấp xỉ của bài toán (QMOP) được ký hiệu là X_θ. Ta gọi $Y_\theta = f(X_\theta)$ là tập giá trị hữu hiệu yếu θ-xấp xỉ của bài toán (QMOP).

Ta cũng định nghĩa tập tất cả các điểm hữu hiệu yếu θ-xấp xỉ cho một tập khác rỗng $Q \subset \mathbb{R}^p$ như sau

$$\text{WMin}(Q, \theta) = \{q^0 \in Q \mid (q^0 - \theta - \text{int}\mathbb{R}^p_+) \cap Q = \emptyset\},$$

và cũng có

$$\mathrm{WMin}(Q, \theta) \equiv Y_\theta.$$

Việc tiếp cận bài toán quy hoạch đa mục tiêu nói chung dựa trên khái niệm nghiệm hữu hiệu yếu xấp xỉ trong những năm gần đây tỏ ra rất hiệu quả khi xem xét giải quyết các bài toán quy hoạch đa mục tiêu cả lồi và không lồi (Xem [8] và [14]).

Theo hướng tiếp cận này, thay vì việc xác định chính xác tập tất cả các nghiệm hữu hiệu yếu Y_{WE}, ta sẽ giải bài toán (QMOP) bằng cách xác định một tập nghiệm hữu hiệu yếu xấp xỉ Y_θ của bài toán này với một sai số θ cho trước.

Do cấu trúc của tập nghiệm hữu hiệu X_E và tập nghiệm hữu hiệu yếu X_{WE} của bài toán (QMOP) thường là không lồi, có cấu trúc phức tạp, không thể mô tả tường minh và bùng nổ khi kích thước của bài toán (bao gồm số chiều không gian quyết định, số chiều không gian ảnh và số lượng ràng buộc) tăng lên [5], nên việc giải bài toán theo hướng tiếp cận trên *không gian quyết định (decision space)*, nghĩa là tìm toàn bộ hay một phần X_E và X_{WE}, được coi là rất khó khăn. Vì lý do đó, với hi vọng làm giảm khối lượng tính toán, nhiều thuật toán đã được đề xuất theo hướng tiếp cận trên *không gian ảnh (outcome space)* (xem [8], [9]), nghĩa là tìm một phần hay toàn bộ tập ảnh hữu hiệu Y_E và Y_{WE}. Ưu điểm của phương pháp tiếp cận này bao gồm ba điểm chính sau (xem [5]):

i) Thứ nhất, không gian ảnh Y_E và Y_{WE} thường có cấu trúc đơn giản hơn và có số chiều nhỏ hơn hẳn không gian quyết định X_E và X_{WE}. Do vậy, khối lượng tính toán để tìm toàn bộ hoặc một phần Y_E và Y_{WE} sẽ nhỏ hơn nhiều so với việc tìm một phần hoặc toàn bộ X_E và X_{WE}.

ii) Thứ hai, trong thực tế, người đưa ra quyết định (decision maker) thường lựa chọn nghiệm chủ yếu dựa trên không gian ảnh Y_E, Y_{WE}

hơn là trên không gian quyết định X_E, X_{WE}.

iii) Thứ ba, nhiều điểm trên không gian quyết định có thể cho cùng một ảnh trên không gian ảnh. Do vậy, việc tiếp cận trên không gian ảnh có thể giảm thiểu được một khối lượng tính toán dư thừa không cần thiết trên không gian quyết định X_E, X_{WE}, vốn có ít ý nghĩa hoặc không có ý nghĩa đối với người ra quyết định.

Mục 2.4 sau đây sẽ trình bày một phương pháp sinh các điểm hữu hiệu yếu trên không gian ảnh theo cách tiếp cận nói trên.

2.3 Điều kiện hữu hiệu

Mục này nghiên cứu tính chất hữu hiệu và hữu hiệu yếu của tập quyết định. Mục đích là khi xét một điểm bất kỳ trên không gian quyết định $x^* \in X$, ta biết được x^* có phải là một nghiệm hữu hiệu hay hữu hiệu yếu hay không. Kỹ thuật được sử dụng để khảo sát điều kiện hữu hiệu yếu trong mục này là kỹ thuật cắt theo tia trên không gian ảnh.

Xét tập ảnh của bài toán (QMOP) là $Y = f(X)$, ta định nghĩa

$$Y^+ = Y + \mathbb{R}^p_+.$$

Mệnh đề 2.1. $\partial Y^+ = Y^+_{WE}$

Chứng minh. Xét một điểm bất kỳ $y \in Y^+_{WE}$ thì $y \in Y^+$ và luôn tồn tại $0 < \delta <$ sao cho hình cầu $B_\delta(y)$ tâm y bán kính δ luôn chứa một điểm $y' < y, y' \notin Y^+$ nên $y \in \partial Y^+$.

Ngược lại nếu $y \in \partial Y^+$. Giả sử $y \notin Y^+_{WE}$ thì tồn tại $y' \in y - \text{int}\mathbb{R}^p_+ \cap Y^+$. Khi đó tồn tại hình cầu $B_\delta(y)$ tâm y bán kính $\delta > 0$ sao cho $B_\delta(y) \subset y' + \mathbb{R}^p_+ \subset Y^+$ mâu thuẫn với điều kiện giả sử. Ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.1. *Cho $\bar{w}$ là một điểm hữu hiệu yếu của Y^+. Khi đó, nếu tồn tại $\bar{y} \in Y$ sao cho $\bar{w} \geq \bar{y}$ thì $\bar{y}$ là một điểm hữu hiệu yếu của Y.*

Chứng minh. Giả sử $\bar{y}$ không phải là một điểm hữu hiệu yếu của Y.

Khi đó, tồn tại $y \in Y$ sao cho $y < \bar{y}$.

Do $Y \subseteq Y^+$ nên ta cũng có $y \in Y^+$. Vì vậy

$$\begin{cases} y \in Y^+, \\ y < \bar{y} \leq \bar{w} \end{cases}$$

mâu thuẫn với điều kiện $\bar{w}$ là một điểm hữu hiệu yếu của Y^+.

Ta có bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.2. *Cho $\bar{v}$ là một điểm nằm thuộc không gian ảnh $\mathbb{R}^p$ và một hướng $\hat{d} > 0$. Khi đó, một đường thẳng đi qua $\bar{v}$ song song với $\hat{d}$ luôn cắt biên của Y^+ tại một điểm duy nhất $\bar{w}$. Hơn nữa, $\bar{w}$ là một điểm hữu hiệu yếu của Y^+.*

Chứng minh. Do Y compact nên luôn tồn tại một phép tịnh tiến sao cho Y qua phép tịnh tiến đó nằm trọn trong $\mathbb{R}^p_+$. Vì vậy, không giảm tính tổng quát, ta có thể giả thiết $Y^+ \subset \text{int}\mathbb{R}^p_+$.

Với $\bar{v} \in \mathbb{R}^p_+$, có hai trường hợp xảy ra.

- ◇ *Trường hợp 1:* $\bar{v} \notin Y^+$. Ký hiệu

$$\Gamma^+ = \{\bar{v} + t\hat{d} \mid t \geq 0\}$$

là tia xuất phát từ $\bar{v}$ theo hướng $\bar{d}$. Theo [4], ta có Γ^+ cắt biên Y^+ tại một điểm duy nhất $\bar{w} \in Y^+_{WE}$.

- ◇ *Trường hợp 2:* $\bar{v} \in Y^+$. Do $Y^+ \subset \text{int}\mathbb{R}^p_+$ nên Y^+ không chứa trọn đường thẳng nào. Ký hiệu

$$\Gamma = \{\bar{v} + t\hat{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

là đường thẳng đi qua $\bar{v}$ và song song với $\hat{d}$. Do Y^+ đóng nên $\Gamma \cap Y^+$ là tập đóng. Đặt

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid \bar{v} + t\hat{d} \in Y^+\}.$$

Ký hiệu t_0 là giá trị tối ưu của bài toán

$$\inf t \quad \text{v.đ.k. } t \in T \tag{P_t}$$

Theo tính chất của phép chiếu $\Pi : \Gamma \to \mathbb{R}$ ta có T cũng là tập đóng. Dễ thấy rằng nếu $t \in T$ và $t' > t$ thì $t' \in T$. Theo định nghĩa, $\Gamma^+ = \{\bar{v} + t\hat{d} \mid t \geq 0\} \in Y^+$. Do đó, hoặc $t_0 = -\infty$ hoặc $t_0 \in T$ hữu hạn và $t_0 \leq 0$. Nếu $t_0 = -\infty$ thì Y^+ chứa trọn cả đường thẳng Γ. Điều này mâu thuẫn với sự kiện Y^+ không chứa trọn đường thẳng nào và chứng tỏ $t_0 \leq 0$ phải là một số hữu hạn. Khi đó, đặt

$$\bar{w} = \bar{v} + t_0\hat{d}.$$

Dễ dàng chứng minh được rằng $\bar{w}$ thuộc biên của Y^+. Thật vậy, theo định nghĩa, $\bar{w} \in Y^+$. Hơn nữa, với mọi $\delta > 0$, hình cầu $B_\delta(\bar{w})$ tâm $\bar{w}$ bán kính δ luôn chứa một điểm $\tilde{w} = \bar{v} + \tilde{t}\hat{d} \in \Gamma, \tilde{t} < t_0$ không thuộc Y^+.

Theo Bổ đề 2.1, ta có $\bar{w} \in Y^+_{WE}$. □

Nhận xét. Để xác định $\bar{w}$ ở Bổ đề 2.2, ta chỉ cần giải bài toán sau

$$\begin{aligned} &\min\ t \\ \text{v.đ.k.}\quad &\bar{v} + t\hat{d} \in Y^+. \end{aligned} \tag{$\mathrm{P}^0(\bar{v})$}$$

Ta có thể viết lại Bài toán $(\mathrm{P}^0(\bar{v}))$ dưới dạng tường minh như sau

$$\begin{aligned} &\min\ t \\ \text{v.đ.k.}\quad &f(x) - \bar{v} - t\hat{d} \leq 0, \\ &x \in X, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{$\mathrm{P}^1(\bar{v})$}$$

Bài toán trên nói chung không phải là một quy hoạch lồi. Ta lấy một ví dụ sau đây để chỉ ra điều này.

Ví dụ 2.2. Xét $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$ với $f(x) = \sqrt{|x|}$ xác định trên $S = [-1, 1]$. Chọn $\hat{d} = 1, \bar{v} = 0$.

Khi đó, bài toán $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$ tương ứng có tập chấp nhận được là
$X^1 = \{(x,t) \mid f(x) - t \leq 0, x \in S\} = \{(x,t) \mid x \in [-1,1], t \geq 0, \sqrt{|x|} - t \leq 0\}$
không phải là tập lồi. Vì vậy, $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$ không phải là một quy hoạch lồi.

Đặt $t = \max\{\dfrac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\}$, Mệnh đề 2.2 sau khẳng định việc giải bài toán $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$ tương đương với việc giải bài toán sau

$$\begin{aligned} \min \quad & \max\{\frac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\} \\ \text{v.đ.k.} \quad & x \in X. \end{aligned} \qquad (\mathrm{P}^2(\bar{v}))$$

Mệnh đề 2.2. *$(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$ và $(\mathrm{P}^2(\bar{v}))$ là hai bài toán tương đương theo ý nghĩa, nếu (x^*, t^*) là nghiệm tối ưu của bài toán $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$ thì x^* là nghiệm của bài toán $(\mathrm{P}^2(\bar{v}))$; ngược lại, nếu x^* là nghiệm tối ưu và t^* là giá trị tối ưu của bài toán $(\mathrm{P}^2(\bar{v}))$ thì (x^*, t^*) là nghiệm tối ưu của bài toán $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$.*

Chứng minh. Gọi (x^*, t^*) là nghiệm của bài toán $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$. Điều kiện chấp nhận được của bài toán $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$ có thể được viết lại thành

$$t \geq \max\{\frac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\}, x \in X, t \in \mathbb{R}.$$

Giả sử tồn tại $x \in X$ sao cho $\max\{\dfrac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\} < \max\{\dfrac{f_j(x^*) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\}$. Đặt $t = \max\{\dfrac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\}$ thì (x, t) thuộc tập chấp nhận được và cho giá trị hàm mục tiêu của bài toán ($\mathrm{P}^1(\bar{v})$) nhỏ hơn giá trị mục tiêu tối ưu t^* (mâu thuẫn). Vì vậy $x^* = \min\{\max\{\dfrac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\}, x \in X\}$ là nghiệm tối ưu của ($\mathrm{P}^2(\bar{v})$).

Ngược lại giả sử x^* là nghiệm tối ưu và t^* là giá trị tối ưu của bài toán ($\mathrm{P}^2(\bar{v})$) thì

$$t^* = \max\{\frac{f_j(x^*) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\}$$

và $x^* \in X$ nên (x^*, t^*) thuộc tập chấp nhận được của bài toán ($\mathrm{P}^1(\bar{v})$). Giả sử tồn tại $x \in X, t \in \mathbb{R}$ sao cho $t^* > t$ và $t \geq \max\{\dfrac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\}$ thì (x, t) thuộc tập chấp nhận được của bài toán ($\mathrm{P}^2(\bar{v})$) và cho giá trị hàm mục tiêu $\max\{\dfrac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\} < t^*$ (mâu thuẫn). Vì vậy (x^*, t^*) là nghiệm tối ưu của bài toán ($\mathrm{P}^1(\bar{v})$) và ta có điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 2.3. ($\mathrm{P}^2(\bar{v})$) *là một quy hoạch tựa lồi chặt.*

Chứng minh. Vì f_j là hàm tựa lồi chặt và $\hat{d}_j > 0$ với mọi $j = 1, \ldots, p$, nên từ Mệnh đề 1.3 ta có hàm số $\max\{\dfrac{f_j(x) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\}$ là hàm tựa lồi chặt. □

Theo Mệnh đề 2.3 và Định lý 1.2, bất kỳ nghiệm tối ưu địa phương nào của ($\mathrm{P}^2(\bar{v})$) cũng là nghiệm tối ưu toàn cục. Vì vậy, ta có thể giải bài toán ($\mathrm{P}^2(\bar{v})$) bằng cách áp dụng một phương pháp giải quy hoạch lồi thích hợp (xem [6], tr. 26).

Mệnh đề 2.4. *Điểm $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán* (QMOP) *khi và chỉ khi giá trị tối ưu t^* của bài toán ($P^0(f(x^*))$) thỏa mãn $t^* = 0$.*

Chứng minh. Đặt $v^* = f(x^*) \in \mathbb{R}^p$. Từ Bổ đề 2.2, trong trường hợp t^* nhận được khi giải bài toán $\mathrm{P}^0(v^*)$, ta thấy $w^* = v^* + t^*\hat{d} \equiv v^* = f(x^*) \in Y_{WE}$. Do vậy $x^* \in X_{WE}$. □

Nhận xét.

i) Mệnh đề 2.4 cho phép kiểm tra một điểm x^* bất kỳ có phải là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP) hay không bằng cách giải một bài toán quy hoạch một mục tiêu tựa lồi chặt;

ii) Nếu giá trị tối ưu t^* của bài toán $(\mathrm{P}^0(f(x^*)))$ khác không, thì ta cũng tìm được một nghiệm hữu hiệu yếu khác của bài toán (QMOP).

2.4 Cấu trúc tập nghiệm của bài toán (QMOP)

Khi nghiên cứu các phương pháp tiếp cận để giải các bài toán tối ưu đa mục tiêu nói chung và cụ thể là bài toán (QMOP) trong đồ án này nói riêng, người ta cũng quan tâm đến cấu trúc tập nghiệm hữu hiệu và hữu hiệu yếu của các bài toán này. Mục này nghiên cứu một số tính chất quan trọng của các tập nghiệm đó đối với bài toán (QMOP).

Đầu tiên ta xem xét một bài toán quen thuộc hơn, trong trường hợp hàm mục tiêu trong bài toán (QMOP) là hàm lồi, bài toán tương ứng là bài toán quy hoạch lồi đa mục tiêu được phát biểu như sau

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{Min}\ f(x) \\ \text{v.đ.k.} & x \in X, \end{array} \tag{CMOP}$$

trong đó X là một tập lồi compact khác rỗng, $f = (f_1, f_2, \dots f_p)^T$ là các hàm lồi trên X.

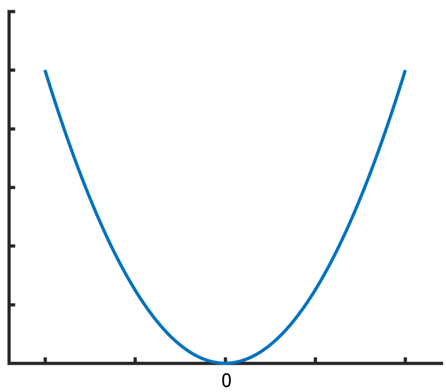
Định lý 2.1. *(Xem [15], tr. 229) Tập nghiệm hữu hiệu X_E và tập nghiệm hữu hiệu yếu X_{WE} của bài toán quy hoạch lồi đa mục tiêu* (CMOP) *là* *các tập liên thông.*

Định lý 2.1 là một tính chất khá thú vị và hữu dụng về tính chất tập nghiệm hữu hiệu và hữu hiệu yếu của bài toán (CMOP). Ta nhận xét rằng một nghiệm hữu hiệu hoặc hữu hiệu yếu này chưa chắc thuộc biên của tập chấp nhận được X, như ở ví dụ sau.

Ví dụ 2.3. Xét bài toán sau

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f_1(x) = x, \\ & f_2(x) = x^2 \\ \text{v.đ.k.} \quad & x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Do tập chấp nhận được $X = [-1, 1]$ là tập lồi và các thành phần trong hàm véc tơ mục tiêu $f = (f_1, f_2)$ đều là các hàm lồi nên đây là một bài toán quy hoạch lồi. Ở bài toán ta thấy tồn tại một điểm $x_0 = 0$, $x_0 \in X_{WE}$, đồng thời $x_0 \in X_E$, tuy nhiên $x_0 \notin \partial X$.



Hình 2.2: Phần màu xanh là minh họa cho không gian ảnh trong Ví dụ 2.3

Trên tập ảnh $Y = f(X)$, ta có $f(0) = (0, 0)$ và $f(1) = (1, 1)$ thuộc tập ảnh nhưng điểm $(0.5, 0, 5)$ nằm trên đoạn nối hai điểm này lại không thuộc tập ảnh. Như vậy, tập ảnh $Y = f(X)$ trong bài toán quy hoạch lồi đa mục tiêu (CMOP) nói chung không phải là tập lồi.

Tuy nhiên, tập ảnh Y của nó thỏa mãn Y^+ là tập lồi. Định lý sau đây chỉ ra một tính chất hữu dụng và thú vị của tập ảnh bài toán (CMOP).

Định lý 2.2. *(Xem [15], tr. 227) Cho $Q \subset \mathbb{R}^p$ là một compact khác rỗng sao cho $Q + \mathbb{R}^p_+$ là tập lồi. Khi đó, tập điểm hữu hiệu Q_E và tập điểm hữu hiệu yếu Q_{WE} là các tập liên thông.*

Theo định nghĩa điểm hữu hiệu yếu, dễ thấy trên không gian ảnh, các điểm thuộc hữu hiệu Y_E hoặc điểm hữu hiệu yếu Y_{WE} của bài toán (CMOP) thì cũng thuộc biên ∂Y của tập ảnh Y.

Ta cũng xem xét các tính chất của các tập nghiệm X_E, X_{WE}, Y_E, Y_{WE} của bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP).

Định lý 2.3. *Tập nghiệm hữu hiệu yếu X_{WE} và tập giá trị hữu hiệu yếu Y_{WE} của bài toán* (QMOP) *là các tập compact khác rỗng nhưng chưa chắc đã liên thông.*

Chứng minh. Kết quả này đươc suy ra trực tiếp từ Định lý 5.24[15], tr. 227. Do X là tập compact khác rỗng, f là hàm liên tục nên X_{WE} và Y_{WE} là tập compact khác rỗng. □

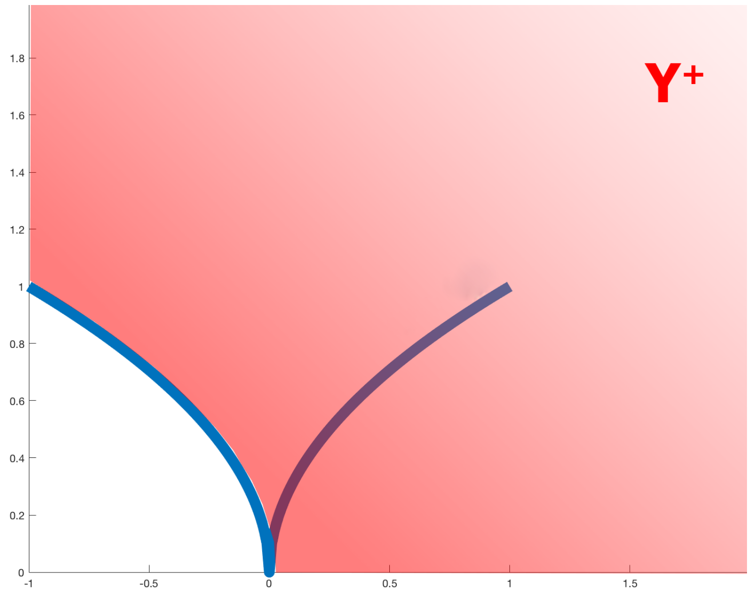
Trong trường hợp hàm mục tiêu là tựa lồi chặt, nói chung tính chất lồi của Y^+ không còn được đảm bảo như trong bài toán (CMOP). Sau đây là một ví dụ chỉ ra điều này.

Ví dụ 2.4. Xét ví dụ sau

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & f_1(x) = x, \\ & f_2(x) = \sqrt{|x|} \\ \text{v.đ.k.} & x \in [-1, 1]. \end{array}$$

Dễ thấy tập chấp nhận được X của bài toán này là tập lồi compact khác rỗng, các hàm mục tiêu $f_1(x), f_2(x)$ là các hàm tựa lồi chặt (xem

Ví dụ 1.1) nên đây là một bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt. Tuy nhiên $Y^+ = \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 \mid -y^1 \leq y^2, -1 \leq y^1\}$ không phải là tập lồi (xem Hình 2.3).



Hình 2.3: Hình minh họa cho Ví dụ 2.4. Phần màu xanh là phần minh họa cho tập ảnh $Y = f(X)$. Phần màu đỏ là minh họa cho tập Y^+.

Do cả ngay ở trường hợp lồi, tập X_E và X_{WE} của bài toán (CMOP) cũng không có tính chất thuộc biên nên tập X_E và X_{WE} của bài toán (QMOP) hiển nhiên cũng không đảm bảo tính chất này.

Do định nghĩa điểm hữu hiệu yếu, đối với trường hợp bài toán (QMOP), ta vẫn dễ dàng chứng minh trên không gian ảnh tập các điểm hữu hiệu Y_E và tập các điểm hữu hiệu yếu Y_{WE} của bài toán này thuộc biên.

Định lý 2.4. *Ta có các khẳng định sau*

i) Y^+ *có thứ nguyên đầy đủ;*

iii) Y^+ *là tập chuẩn đảo;*

ii) Y^+_{WE} *là tập liên thông;*

Chứng minh. i) Suy ra trực tiếp từ định nghĩa của Y^+.

ii) Cũng theo định nghĩa tập Y^+, rõ ràng với mọi $y \in Y^+$ thì $y + \mathbb{R}^p_+ \in Y^+$ nên theo Định nghĩa 1.6, ta có Y^+ là một tập chuẩn đảo trong $\mathbb{R}^p$.

iii) Đã được chứng minh ở Định lý 1[12], tr. 350. □

Tính chất liên thông không đúng với Y^+_E. Ví dụ sau đây chỉ ra điều này.

Ví dụ 2.5. Xét bài toán Min $f_2(x) = x, f_2(x) = \min\{|x|, 1\}$ trên tập chấp nhận được $X = [-2, 2]$. Từ Ví dụ 1.5, ta chứng minh được đây là một bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt. Lúc đó $Y^+_E = \{(-2, 1)\} \cup \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = -y^1, -1 < y^1 \leq 0\}$ không phải là một tập liên thông.

Chương 3

Thuật toán xấp xỉ ngoài giải bài toán (QMOP)

Trong chương này, đồ án đưa ra một thuật toán xấp xỉ ngoài cho tập nghiệm hữu hiệu yếu tập giá trị của bài toán (QMOP). Mục 3.1 trình bày cơ sở lý thuyết của thuật toán, đặc biệt là cách xây dựng đa hộp xuất phát và cách sinh các điểm hữu hữu hiệu yếu trên tập ảnh. Thuật toán chi tiết được đề xuất ở Mục 3.2. Tính chất hội tụ của thuật toán này được chứng minh ở Mục 3.3. Mục 3.4 đưa ra nhiều tính toán thử nghiệm để chứng minh tính hiệu quả của thuật toán được đề xuất.

Từ những năm 1960, người ta đã xây dựng các kỹ thuật nhằm sinh ra các điểm hữu hiệu và hữu hiệu yếu cho bài toán quy hoạch đa mục tiêu phi tuyến [7]. Tuy nhiên, theo hiểu biết của tác giả đồ án, trong những công trình nghiên cứu đó, số lượng các công trình về những lớp hàm không lồi còn rất hạn chế. Có thể kể đến chẳng hạn [7] xây dựng một phương pháp sinh các điểm hữu hiệu cho bài toán quy hoạch đa mục tiêu phân thức lõm, [17] đã trình bày một kỹ thuật sinh các điểm hữu hiệu yếu cho bài toán quy hoạch đa mục tiêu lồi suy rộng với trường hợp hàm mục tiêu là hàm véc tơ giả lồi vô hướng.

3.1 Cơ sở lý thuyết

Trong mục này, chúng tôi trình bày một kỹ thuật sinh các điểm hữu hiệu yếu trên tập ảnh của bài toán (QMOP).

Xét bài toán sau

$$\begin{array}{ll} & \min y_i \\ \text{v.đ.k.} & y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)^T \in Y \subseteq \mathbb{R}^p. \end{array} \tag{LB(i)}$$

Đặt $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p)^T$, trong đó l_i là giá trị tối ưu của bài toán (LB(i)).

Ta cũng xét bài toán sau

$$\begin{array}{ll} & \max y_i \\ \text{v.đ.k.} & y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)^T \in Y \subseteq \mathbb{R}^p. \end{array} \tag{UB(i)}$$

Đặt $u = u_1, u_2, \ldots, u_p)^T$, trong đó u_i là giá trị tối ưu của bài toán (UB(i)).

Chọn hai véc tơ b, d thỏa mãn $b < l \leq u < d$, nhắc lại $Y^+ = Y + \mathbb{R}^p_+$. Đặt

$$\begin{aligned} B^0 &= [b, d] = (b + \mathbb{R}^p_+) \cap (d - \mathbb{R}^p_+), \\ Y^\diamond &= Y^+ \cap (d - \mathbb{R}^p_+). \end{aligned}$$

Rõ ràng Y^+ và $Y^\diamond$ có điểm trong và $Y^\diamond \subset B^0$. Hơn nữa, ta có mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 3.1. *Nếu $l \in Y$ thì tập Y_E chỉ chứa mỗi l và $Y^+ = l + \mathbb{R}^p_+$.*

Chứng minh. Giả sử $l \in Y$, khi đó ta xét bất kỳ $y \in Y, y \neq l$, ta có

$$\begin{cases} l \in y - \mathbb{R}^p_+ \\ Y \ni l \neq y \end{cases}$$

suy ra $y \notin Y_E$, hay Y_E chỉ chứa mỗi l.

Ta đi chứng minh $Y^+ = l + \mathbb{R}^p_+$.

Xét tùy ý $y \in Y + \mathbb{R}^p_+$, suy ra tồn tại $y' \in Y$ sao cho $y \geq y'$.
Do $y' \geq l$ nên $y \geq l$ hay $y \in l + \mathbb{R}^p_+$.

Ngược lại, xét $y \in l + \mathbb{R}^p_+$.
Do $l \in Y$, suy ra $l + \mathbb{R}^p_+ \subset Y + \mathbb{R}^p_+$ hay $y \in Y + \mathbb{R}^p_+$.

Vậy, $Y^+ = l + \mathbb{R}^p_+$ (điều phải chứng minh). □

Dưới đây ta có một vài tính chất của Y^+ và $Y^\diamond$ (Xem thêm [5], [20]).

Bổ đề 3.1. *Với tập Y^+ và $Y^\diamond$ được định nghĩa ở trên, ta có:*

$$Y_{WE} = Y^+_{WE} \cap Y = Y^\diamond_{WE} \cap Y.$$

Chứng minh. Ta chứng minh vế đầu của Bổ đề.

- ◇ Xét bất kỳ $y \in Y_{WE}$. Theo định nghĩa điểm hữu hiệu yếu ta có ngay $y \in Y$.

  Giả sử tồn tại $y' \in Y^+$ sao cho $y' < y$.

  Khi đó tồn tại $y^* \in Y$ và $u \in \mathbb{R}^p_+$ sao cho $y' = y^* + u < y$, suy ra $y^* < y$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $y \in Y_{WE}$.

  Vì vậy không tồn tại $y' \in Y^+$ sao cho $y' < y$. Nói cách khác $y \in Y^+_{WE}$. Suy ra

$$Y_{WE} \subseteq Y^+_{WE} \cap Y. \tag{3.1}$$

- ◇ Ngược lại, xét bất kỳ $y \in Y^+_{WE} \cap Y$. Khi đó

$$\begin{cases} y \in Y^+_{WE} \\ y \in Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y - \mathrm{int}\mathbb{R}^p_+) \cap Y^+ = \emptyset \\ y \in Y \end{cases}$$

Do theo định nghĩa thì $Y \subseteq Y^+$ nên ta cũng có $(y - \text{int}\mathbb{R}^p_+) \cap Y = \emptyset$, nên

$$\begin{cases} (y - \text{int}\mathbb{R}^p_+) \cap Y = \emptyset \\ y \in Y \end{cases}.$$

Suy ra $y \in Y_{WE}$ nên

$$Y^+_{WE} \cap Y \subseteq Y_{WE}. \tag{3.2}$$

Từ (3.1) và (3.2) ta có vế đầu của Bổ đề được chứng minh.

Dễ thấy khi $y \in Y_{WE}$ thì $y < d$ nên kết hợp điều này ta dễ dàng chứng minh vế thứ hai hoàn toàn tương tự với chứng minh ở trên. □

Nhận xét. Cho một điểm $\bar{v} \in B^0$ nằm ngoài Y^+ và một hướng $\hat{d} > 0$. Gọi $\bar{t}$ là nghiệm tối ưu của bài toán $(\mathrm{P}^1(\bar{v}))$ và đặt $\bar{w} = \bar{v} + \bar{t}\hat{d}$. Khi đó, với mỗi $\bar{x} \in X$ sao cho $f(\bar{x}) \leq \bar{w}$ thì $y = f(\bar{x}) \in Y_{WE}$ và $\bar{x} \in X_{WE}$.

Thật vậy, xét $\bar{x} \in X$ thỏa mãn $f(\bar{x}) \leq \bar{w}$. Khi đó

$$f(\bar{x}) \leq \bar{v} + \bar{t}\hat{d} \Leftrightarrow \max\{\frac{f_j(\bar{x}) - \bar{v}_j}{\hat{d}_j} \mid j = 1, \ldots, p\} \leq \bar{t}.$$

Vì vậy, hiển nhiên $\bar{x}$ là một nghiệm tối ưu của bài toán $(\mathrm{P}^2(\bar{v}))$.

Từ Bổ đề 2.2, ta có $\bar{w}$ là một điểm hữu hiệu yếu của Y^+.

Do giả thiết $f(\bar{x}) \leq \bar{w}$, kết hợp với Bổ đề 2.1, ta suy ra $f(\bar{x})$ là một điểm hữu hiệu yếu của Y. Do đó từ định nghĩa nghiệm hữu hiệu yếu, ta kết luận $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP).

Nhận xét trên đã chỉ ra cách xác định một điểm hữu hiệu yếu của tập Y^+ và nghiệm hữu hiệu yếu tương ứng của bài toán (QMOP).

3.2 Thuật toán giải bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt

Xuất phát từ hộp $B^0 = [b, d]$, ta xây dựng một dãy các đa hộp đảo $\{B^k\}$ sao cho

$$B^0 \supset B^1 \supset \cdots \supset B^k \supset B^{k+1} \supset \cdots \supset Y^\diamond.$$

Gọi:

- $\diamond$ V^k là tập tất cả các đỉnh chính quy xác định B^k;
- $\diamond$ EO là tập đỉnh xấp xỉ ngoài của tập hữu hiệu yếu;
- $\diamond$ EY là tập các giá trị hữu hiệu yếu.

Ban đầu, với $k = 0$ ta có $V^0 = \{b\}, EO = \emptyset$ và $EY = \emptyset$.

Ở bước lặp thứ k, có hai trường hợp xảy ra:

a) $V^k \subseteq EO$, hoặc
b) Tồn tại $v^k \in V^k \setminus EO$.

Trong trường hợp đầu tiên, thuật toán kết thúc. Trong trường hợp thứ hai, ta giải $\mathrm{P}^2(v^k)$ để tìm một giá trị hữu hiệu yếu mới $f(x^k)$ của bài toán (QMOP) và một điểm hữu hiệu yếu $w^k = v^k + t_k\hat{d}$ của Y^+, trong đó cặp (x^k, t_k) là nghiệm tối ưu của bài toán $\mathrm{P}^2(v^k)$. Nếu v^k đủ gần w^k, ta bổ sung nó vào tập các điểm hữu hiệu yếu xấp xỉ ngoài, để xây dựng tập xấp xỉ ngoài hữu hiệu yếu cho $Y^\diamond$. Ngược lại, ta xác định xấp xỉ tiếp theo B^{k+1} bằng phương pháp xấp xỉ ngoài bởi đa hộp đảo. Với k đủ lớn, tất cả các đỉnh của B^k sẽ đủ gần với $Y^\diamond$ và thuật toán kết thúc.

Thuật toán *Solve(QMOP)*:

Bước 0 (khởi tạo). Chọn $\varepsilon \geq 0$ và tìm các điểm l và u bằng cách giải (LB(i)) và (UB(i)) với $i = 1, \ldots, p$. Đặt

$$B^0 = [b, d] \text{ với } b < l \text{ và } u < d.$$

Xác định tập V^0 và chọn một hướng $\hat{d} > 0$. Đặt $EO = \emptyset$, $EY = \emptyset$ và $k = 0$.

Bước 1. **If** $V^k \subseteq EO$ **then** Thuật toán dừng.
Else
Chọn bất kỳ $v^k \in V^k \setminus EO$ và chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Giải bài toán ($\mathrm{P}^2(v^k)$) để tìm một nghiệm tối ưu x^k và giá trị tối ưu t_k. Đặt

$$\begin{aligned} w^k &= v^k + t_k\hat{d}, \\ EY &= EY \cup \{f(x^k)\}. \end{aligned}$$

Bước 3. **If** $||w^k - v^k|| < \varepsilon$ **then**
Đặt $EO = EO \cup \{v^k\}$
và quay lại Bước 1.
Else

- ◇ Xác định B^{k+1} và V^{k+1} bằng cách cắt B^k bởi $(v^k - \mathrm{int}\mathbb{R}^p_+)$;
- ◇ Loại bỏ các đỉnh không thuộc hộp $[b, d]$;
- ◇ Loại bỏ các đỉnh không chính quy bằng thủ tục RIV(V^{k+1});
- ◇ Đặt $k = k + 1$ và quay lại Bước 1.

Sau đây là mô tả chi tiết thủ tục RIV(V^{k+1}) (xem [19], tr. 473).

Thủ tục RIV(V^{k+1}, v^k, w^k):

Xét $v^k, w^k, w^{k,i}, i = 1, \ldots, p$ ở bước lặp thứ k của thuật toán *Solve(QMOP)*. Với mỗi $w \in V^k \setminus \{v^k\}$:
If $w \geq v^k$ và $w_i < w_i^k$ với đúng một i thuộc tập $\{1, \ldots, p\}$
(*i.e.*, $w_i < w_i^k$ và $w_j \geq w_j^k \ \forall j \neq i$)

then Loại bỏ đỉnh $w^{k,i}$.

Sau đây là cách xác định cụ thể các điểm b, d. Với mỗi $i \in \{1, \dots, p\}$, vì f_i là tựa lồi chặt, nên theo Định lý 1.2, bất kỳ nghiệm tối ưu địa phương nào của bài toán (LB(i)) cũng là nghiệm tối ưu toàn cục của nó. Do vậy, ta có thể giải bài toán (LB(i)) bằng các phương pháp giải quy hoạch lồi.

Dễ thấy bài toán (UB(i)) không phải là một quy hoạch lồi. Tuy nhiên, ta có thể tìm được một cận trên của $f(X)$ mà không cần giải bài toán (UB(i)). Thật vậy, với mỗi $j = 1, \dots, n$, đặt

$$\hat{x}_j := \min\{x_j \mid x \in X\}.$$

Đặt $\hat{x}^0 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ và

$$\beta = \max\{\langle e, x\rangle \mid x \in X\},$$

trong đó $e \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ có tất cả các phần tử bằng một. Vì X là một tập lồi compact nên β là giá trị tối ưu của một bài toán quy hoạch lồi và β hữu hạn. Với mỗi $j = 1, 2, \dots, n$, gọi $\hat{x}^j = (\hat{x}^j_1, \hat{x}^j_2, \dots, \hat{x}^j_n)^T$ xác định bởi

$$\hat{x}^j_k = \begin{cases} \hat{x}^0_k, & \text{nếu } k \neq j \\ \beta - \sum_{k \neq j} \hat{x}^0_k, & \text{nếu } k = j. \end{cases}$$

Ký hiệu S là một đơn hình với tập đỉnh $V(S) = \{\hat{x}^0, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n\}$. Rõ ràng $X \subseteq S$. Do vậy,

$$\max\{f_i(x) \mid x \in X\} \leq \max\{f_i(x) \mid x \in S\}.$$

Vì $f_i(x), i = 1, \dots, p$ là tựa lồi chặt và S là một đơn hình, ta có

$$\max\{f_i(x) \mid x \in S\} = \max\{f_i(x) \mid x \in V(S)\}.$$

Với mỗi $i = 1, \dots, p$, đặt

$$\hat{y}_i = \max\{f_i(x) \mid x \in V(S)\}. \tag{3.3}$$

Khi đó,

$$\hat{y}_i \geq \max\{f_i(x) \mid x \in X\} = \max\{y_i \mid y \in Y\}.$$

Suy ra $\hat{y} \geq u$ với $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_p)^T$.

Như vậy, ta chọn d là một điểm bất kỳ thỏa mãn $d > \hat{y}$.

3.3 Sự hội tụ của thuật toán

Định nghĩa 3.1. Ta định nghĩa *khoảng cách Hausdorff* giữa 2 tập đóng $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^p$ là

$$\begin{aligned} h(Q_1, Q_2) &= \inf\{t > 0 : Q_1 \subseteq Q_2 + tU_p, Q_2 \subseteq Q_1 + tU_p\} \\ &= \max\{\sup_{v_1 \in Q_1} d(v_1, Q_2), \sup_{v_2 \in Q_2} d(v_2, Q_1)\}, \end{aligned}$$

trong đó: U_p là khối cầu đóng đơn vị trong $\mathbb{R}^p$ và khoảng cách từ một điểm v đến một tập $Q \subset \mathbb{R}^p_+$ được tính bởi

$$d(v, Q) = \inf_{y \in Q} ||v - y||.$$

Đặt $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^p$ là một dãy các tập đóng khác rỗng. Ta nói rằng dãy này hội tụ về một tập đóng Q, ký hiệu $\lim_{k \to \infty} Q_k = Q$ nếu $\lim_{k \to \infty} h(Q_k, Q) = 0$.

Ta nhắc lại ký hiệu $Y = f(X), Y^+ = Y + \mathbb{R}^p_+$ và $Y^\diamond = Y^+ \cap (d - \mathbb{R}^p_+)$.

Bổ đề 3.2. *Với mọi $v \in B^0 \setminus Y^\diamond$ ta có $d(v, Y^+) = d(v, Y^\diamond)$.*

Chứng minh. Xét khoảng cách từ một điểm $v \in B^0 \setminus Y^\diamond$ đến tập Y^+. Ta có

$$\begin{aligned} d(v, Y^+) &= \min\{d(v, y) \mid y \in Y^+\} \\ &= \min\{d(v, y) \mid y \leq f(x), x \in X\}. \end{aligned}$$

Do X compact nên bài toán trên luôn có nghiệm. Hay nói cách khác, khoảng cách từ v đến Y^+ là hữu hạn, nên tồn tại một hình cầu đóng $V_r(v)$ tâm v bán kính $r > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y^+} d(v, y) &= \min_{y \in Y^+ \cap V_r(v)} d(v, y) \\ \Leftrightarrow d(v, Y^+) &= d(v, Y^+ \cap V_r(v)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Xét một tập chuẩn đảo compact Q không chứa v. Gọi z^* là hình chiếu của v lên Q. Khi đó tồn tại một hình cầu $V_{||z^* - v||}(v)$ tâm v đi qua z^*.

Giả sử $z^* \notin v + \mathbb{R}^p_+$ thì tồn tại một điểm $z^{*'} \neq z^*, z^{*'} \in z^* + \mathbb{R}^p_+$ sao cho

$$z^{*'} \in \text{int} V_{||z^*-v||}(v).$$

Do Q là tập chuẩn nên $z^{*'} \in Q$. Điều giả sử là vô lý do $d(v, z^{*'}) < d(v, z^*)$. Vì vậy,

$$z^* \in v + \mathbb{R}^p_+. \tag{3.5}$$

Vẫn xét một tập chuẩn đảo compact Q không chứa v. Với mỗi $y' \in (v + \mathbb{R}^p_+) \cap Q$, xét hình cầu $V_{||v-y'||}(v)$ tâm v đi qua y'.

Vì $y' \in v + \mathbb{R}^p_+$ nên

$$(y' + \mathbb{R}^p_+) \setminus y' \cap V_{||v-y'||}(v) = \emptyset.$$

Suy ra

$$d(v, y) > d(v, y'),\ \forall y \in y' + \mathbb{R}^p_+.$$

Vì vậy, $d(v, y)$ là hàm liên tục, tăng theo biến y trên miền $(v+\mathbb{R}^p_+) \cap Q$ nên theo Định lý 1.3, giá trị cực tiểu của nó đạt tại một điểm hữu hiệu yếu của miền này. Xét $Q = Y^\diamond$ và $Q = Y^+ \cap V_r(v)$, kết hợp với (3.4) và (3.5), ta có

$$\begin{aligned}
d(v, Y^+) = d(v, Y^+ \cap V_r(v)) &= \min_{y \in Y^+ \cap V_r(v) \cap (v+\mathbb{R}^p_+)} d(v, y) \\
= \min_{y \in Y^+_{WE} \cap V_r(v) \cap (v+\mathbb{R}^p_+)} d(v, y) &= \min_{y \in Y^+_{WE} \cap Y \cap V_r(v) \cap (v+\mathbb{R}^p_+)} d(v, y) \\
= \min_{y \in Y_{WE} \cap V_r(v) \cap (v+\mathbb{R}^p_+)} d(v, y) &= \min_{y \in Y^\diamond_{WE} \cap Y \cap V_r(v) \cap (v+\mathbb{R}^p_+)} d(v, y) \\
&= \min_{y \in Y^\diamond_{WE}} d(v, y) = d(v, Y^\diamond).
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 3.3. *Ở vòng lặp thứ k của thuật toán, gọi w_v là điểm hữu hiệu yếu thu được khi giải $(P^2(v))$ với $v \in V^k$, thì*

$$h(B^k, Y^\diamond) \leq \max_{v \in V^k} ||w_v - v||.$$

Chứng minh. Vì V^k là tập tất cả các đỉnh của B^k nên theo Định nghĩa 1.9, ta có

$$\max\{d(v, Y^\diamond) \mid v \in B^k\} = \max_{z \in V^k}\{\max\{d(v, Y^\diamond) \mid v \in N_d^r(z)\}\}.$$

Do hàm $d(v, Y^\diamond)$ là hàm lồi và $N_d^r(z)$ là hình hộp (là một tập lồi) nên

$$\max\{d(v, Y^\diamond) \mid v \in N_d^r(z)\} = d(z, Y^\diamond).$$

Khi đó

$$h(B^k, Y^\diamond) = \max_{v \in B^k} d(v, Y^\diamond) = \max_{v \in V^k} d(v, Y^\diamond).$$

Do $w_v \in Y^+$ với mọi $v \in V^k$, theo Bổ đề 3.2, ta có

$$\max_{v \in V^k} d(v, Y^\diamond) = \max_{v \in V^k} d(v, Y^+) \leq \max_{v \in V^k} ||w_v - v||,$$

suy ra điều phải chứng minh. □

Bổ đề 3.4. *Tồn tại một điểm $d' > d$ sao cho với mỗi $v \in B^0 \setminus Y^\diamond$, điểm hữu hiệu yếu w_v của Y^+ tìm được bằng cách giải $(\mathrm{P}^2(\bar{v}))$ nằm trong hộp $[b, d']$.*

Chứng minh. Gọi $D(v)$ là tập chấp nhận được của bài toán $(\mathrm{P}^2(\bar{v}))$, t_v là giá trị tối ưu tìm được khi giải bài toán $(\mathrm{P}^2(v))$ và t_b là giá trị tối ưu tìm được khi giải bài toán $(\mathrm{P}^2(b))$. Sự tồn tại của hai giá trị t_v và t_b đã được chứng minh ở Bổ đề 2.2.

Khi đó, với mỗi $(x, t) \in D(b)$ và $v \in B^0 \setminus Y^\diamond$, ta có

$$f(x) \leq b + t\hat{d} \leq v + t\hat{d}.$$

Do vậy, $(x, t) \in D(v)$ và $t_v \leq t_b$, theo Bổ đề 2.2, ta có

$$b \leq w_v = v + t_v\hat{d} \leq v + t_b\hat{d} \leq d + t_b\hat{d}.$$

Suy ra tập tất cả $w_v, v \in B^0 \setminus V^\diamond$, được chứa trong hộp $[b, d']$, trong đó $d' = d + t_b\hat{d}$. □

Bổ đề 3.5. *Cho $w_v = v + t\hat{d}$ với t là giá trị tối ưu thu được khi giải $(P^2(v))$ với mỗi $v \in V^k$. Với $\varepsilon = 0$, một trong hai mệnh đề sau thỏa mãn:*

i) Tồn tại $k \geq 0$ nào đó sao cho

$$\max_{v \in V^k} ||w_v - v|| = 0,$$

ii)

$$\lim_{k \to \infty} \max_{v \in V^k} ||w_v - v|| = 0.$$

Chứng minh. Ta xét hộp $\hat{B}^0 = [b, d']$, với $d' = d + t_b\hat{d}$ xác định như trong phần chứng minh của Bổ đề 3.4. Ở bước lặp thứ k, khi xác định đa hộp đảo B^{k+1} trong hộp $[b, d]$, bằng cách tương tự ta cũng dễ dàng xác định $\hat{B}^{k+1}$ là một đa hộp đảo trong hộp $[b, d']$ có tập đỉnh là $\hat{V}^{k+1} \equiv V^{k+1}$.

Dễ thấy $B^k \subseteq \hat{B}^k$ và $\hat{B}^{k+1} \subseteq \hat{B}^k$ với $k \geq 0$. Theo Bổ đề 3.4, $w_v \in \hat{B}^k$, với mỗi $v \in B^k \setminus Y^\diamond$.

Xét $v^k \in B^k$ ở vòng lặp thứ k. Do cách định nghĩa w_{v^k}, ta có

$$[v^k, w_{v^k}] \subseteq \hat{B}^k.$$

Hơn nữa, do cách xác định B^{k+1},

$$(w_{v^k} - \text{int}\mathbb{R}^p_+) \cap \hat{B}^{k+1} = \emptyset.$$

Suy ra

$$\text{int}[v^k, w_{v^k}] \subseteq \hat{B}^k \setminus \hat{B}^{k+1}.$$

Vì vậy nên thể tích của $\hat{B}^k$ thỏa mãn

$$\text{Vol}\hat{B}^k - \text{Vol}\hat{B}^{k+1} \geq \text{Vol}[v^k, w_{v^k}]. \tag{3.6}$$

Từ

$$w_{v^k} - v^k = t_k\hat{d},$$

suy ra

$$\mathrm{Vol}[v^k, w_{v^k}] \;=\; (t_k)^p \mathrm{Vol}[0, \hat{d}]. \tag{3.7}$$

Nếu $\max_{v \in V^k} ||w_v - v|| > 0$ với mọi $k \geq 0$, ta chọn $v^k \in V^k$ sao cho

$$||w_{v^k} - v^k|| = \max_{v \in V^k} ||w_v - v||,$$

và sử dụng (3.6), (3.7), ta thu được

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\hat{B}^0 \;&\geq\; \mathrm{Vol}\hat{B}^0 - \mathrm{Vol}\hat{B}^{k+1} \;=\; \textstyle\sum_{i=0}^{k} (\mathrm{Vol}\hat{B}^i - \mathrm{Vol}\hat{B}^{i+1}) \\ &\geq\; \textstyle\sum_{i=0}^{k} \mathrm{Vol}[v^i, w_{v^i}] \;=\; \left(\textstyle\sum_{i=0}^{k} (t_i)^p\right) \mathrm{Vol}[0, \hat{d}], \end{aligned}$$

với mọi $k \geq 1$. Cho $k \to \infty$, ta có

$$\mathrm{Vol}\hat{B}^0 / \mathrm{Vol}[0, \hat{d}] \geq \sum_{i=0}^{\infty} (t_i)^p.$$

Do vậy, chuỗi dương $\sum_{i=0}^{\infty} (t_i)^p$ hội tụ, nên

$$0 = \lim_{i \to \infty} t_i = \lim_{i \to \infty} \frac{||w_{v^i} - v^i||}{||\hat{d}||}$$

Vì $||\hat{d}|| > 0$ bị chặn, nên với mọi $i \geq 1$, ta có

$$0 = \lim_{i \to \infty} ||w_{v^i} - v^i|| = \lim_{i \to \infty} \max_{v \in V^i} ||w_v - v||.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 3.1. *Với một $\varepsilon \geq 0$ cho trước, các tập $B^k, k \geq 0$ trong Thuật toán Solve(QMOP) thỏa mãn*

$$Y^\diamond \subseteq B^{k+1} \subseteq B^k.$$

Hơn nữa, với $\varepsilon = 0$ ta có

$$\begin{aligned} Y^\diamond \;&=\; \lim_{k \to \infty} B^k \;=\; \textstyle\bigcap_{k \geq 1} B^k, \\ Y^\diamond_{WE} \;&=\; \lim_{k \to \infty} B^k_{WE}. \end{aligned}$$

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 3.3 và Bổ đề 3.5 ta thu được

$$\lim_{k \to \infty} h(B^k, Y^\diamond) \leq \lim_{k \to \infty} \max_{v \in V^k} ||w_v - v|| = 0,$$

nên $\{B^k\}_{k \geq 0}$ hội tụ về $Y^\diamond$. Phần thứ nhất của Định lý đã được chứng minh.

Phương trình $\lim_{k\to\infty} B^k = \bigcap_{k\geq 1} B^k$ hiển nhiên do $Y^\diamond \subseteq B^{k+1} \subseteq B^k$. Ta còn phải chứng minh phương trình thứ 2. Ta có

$$Y^\diamond_{WE} = \partial Y^+ \cap (d - \mathbb{R}^p_+), \tag{3.8}$$

trong đó, ∂Y^+ là biên của Y^+.

Áp dụng phương trình này với B^k, ta có

$$B^k_{WE} = \partial B^{k+} \cap (d - \mathbb{R}^p_+) \subseteq B^k, \tag{3.9}$$

trong đó $B^{k+} = B^k + \mathbb{R}^p_+$. Hơn nữa, vì $Y^+ \subseteq B^{k+}$, suy ra

$$h(\partial B^{k+} \cap (d - \mathbb{R}^p_+), \partial Y^+ \cap (d - \mathbb{R}^p_+))$$
$$= \max\{d(v, \partial Y^+ \cap (d - \mathbb{R}^p_+)) \mid v \in \partial B^{k+} \cap (d - \mathbb{R}^p_+)\}.$$

Theo Bổ đề 3.2, với mỗi v nằm trong hộp $[b, d]$ không thuộc $Y^\diamond$, ta có

$$d(v, Y^\diamond) = d(v, Y^+) = d(v, \partial Y^+) = d(v, \partial Y^+ \cap (d - \mathbb{R}^p_+))$$
$$\Rightarrow h(\partial B^{k+} \cap (d - \mathbb{R}^p_+), \partial Y^+ \cap (d - \mathbb{R}^p_+)) \leq \max_{v\in B^k} d(v, Y^\diamond).$$

Từ phương trình thứ nhất, và phương trình (3.8), (3.9) $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} B^k_{WE} = Y^\diamond_{WE}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 3.2. Với tập EY và EO thu được bởi Thuật toán *Solve(QMOP)*, ký hiệu

$$Y^{in} := N^r_d(EY)$$

và

$$Y^{out} := N^r_d(EO) \equiv B^K,$$

trong đó K là chỉ số vòng lặp cuối cùng của thuật toán và $N^r_d(Q) = (Q + \mathbb{R}^p_+) \cap (d - \mathbb{R}^p_+)$ là bao chuẩn đảo của Q.

Nhận xét. Rõ ràng các tập Y^{in} và Y^{out} lần lượt cho ta các xấp xỉ trong và ngoài của $Y^\diamond$, các điểm hữu hiệu yếu thu được là các điểm hữu hiệu yếu xấp xỉ của $Y^\diamond$.

Nhắc lại rằng với $\theta \in \mathbb{R}^p_+$, X_θ là tập tất cả các nghiệm hữu hiệu yếu θ-xấp xỉ của bài toán (QMOP). Khi đó ta có đẳng thức sau

$$X_\theta = \bigcup_{\bar{y} \in Y^\diamond_\theta} \{x \in X \mid f(x) \leq \bar{y}\}.$$

Xét $\varepsilon > 0$ cho trước. Giả sử thuật toán dừng lại ở bước lặp thứ K. Ta có tính chất sau của Y^{in} và Y^{out}.

Định lý 3.2. *Đặt $\theta = \varepsilon e$, trong đó $e \in \mathbb{R}^p$ là véc tơ có tất cả các phần tử bằng một. Giả thiết thuật toán dừng ở vòng lặp thứ K, ta có:*

- $\diamond$ $Y^{in} \subseteq Y^\diamond \subseteq Y^{out}$.
- $\diamond$ $Y^\diamond_{WE} \subseteq Y^{out}_\theta \cap Y^\diamond \subseteq Y^\diamond_\theta$.
- $\diamond$ $Y^{in}_{WE} \subseteq Y^\diamond_\theta$.

Chứng minh. Ta có i) hiển nhiên.

Để chứng minh ii), do thuật toán dừng ở bước lặp thứ K, theo Định lý 3.1, ta có

$$Y^{\text{out}} \equiv B^K \subseteq Y^\diamond + \varepsilon U_p.$$

Do đó, với $y \in Y^\diamond_{\text{WE}}$, ta có

$$\begin{aligned}
[(y - \varepsilon e) - \text{int}\mathbb{R}^p_+] \cap B^K &\subseteq [(y - \varepsilon e) - \text{int}\mathbb{R}^p_+] \cap (Y^\diamond + \varepsilon U_p) \\
&\subseteq [(y - \varepsilon e) - \text{int}\mathbb{R}^p_+] \cap (Y^\diamond - \varepsilon e + \mathbb{R}^p_+) \\
&\subseteq [y - \text{int}\mathbb{R}^p_+] \cap Y^\diamond = \emptyset,
\end{aligned}$$

$\Rightarrow y \in Y^{\text{out}}_\theta$.

Hơn nữa, với $y \in Y^{\text{out}} \cap Y^\diamond$. Theo định nghĩa, $[(y - \varepsilon e) - \text{int}\mathbb{R}^p_+] \cap B^k = \emptyset$, nên $[(y - \varepsilon e) - \text{int}\mathbb{R}^p_+] \cap Y^\diamond = \emptyset$ vì $Y^\diamond \subseteq B^K$, suy ra $y \in Y^\diamond_\theta$.

Với cách chứng minh này, hoàn toàn tương tự ta thu được mệnh đề iii). □

Dựa trên xấp xỉ ngoài của $Y^{\diamond}$, ta có thể xây dựng được một xấp xỉ của tập nghiệm hữu hiệu yếu cho bài toán (QMOP) như sau

$$EX = \bigcup_{\bar{y} \in Y_{\theta}^{out}} \{x \in X \mid f(x) \leq \bar{y}\}.$$

Sau đây ta chỉ ra tính chất hội tụ của thuật toán trên không gian quyết định.

Mệnh đề 3.2. *Cho trước một $\varepsilon > 0$, Thuật toán Solve(QMOP) dừng lại sau một số hữu hạn các bước lặp và sinh ra $X_{WE} \subseteq EX \subseteq X_{\theta}$.*

Chứng minh. Cho $\varepsilon > 0$. Do Bổ đề 3.5, tồn tại $K > 0$ sao cho $||w_v - v|| \leq \varepsilon$ với mọi $v \in V^K$. Do đó, thuật toán sẽ dừng lại tại vòng lặp đó. Hơn nữa, vì $x \in X_{\mathrm{WE}}$ khi và chỉ khi $f(x) \leq y$ với $y \in Y_{\mathrm{WE}}^{\diamond}$, ta suy ra từ (ii) (Định lý 3.2)

$$X_{\mathrm{WE}} \subseteq \bigcup_{\bar{y} \in Y_{\mathrm{WE}}^{\diamond}} \{x \in X \mid f(x) \leq \bar{y}\} \subseteq \bigcup_{\bar{y} \in Y_{\theta}^{\mathrm{out}} \cap Y^{\diamond}} \{x \in X \mid f(x) \leq \bar{y}\} = EX.$$

Hơn nữa, từ cách định nghĩa X_{θ}, ta có $EX \subseteq X_{\theta}$. Vì vậy, $X_{WE} \subseteq EX \subseteq X_{\theta}$. Ta có điều phải chứng minh. □

3.4 Thử nghiệm tính toán

Trong chương này, ta đưa ra một số ví dụ để minh họa cho Thuật toán *Solve(QMOP)* đề xuất ở Chương 3. Ở ví dụ đầu tiên, ta xét một bài toán quy hoạch đa mục tiêu phân thức lồi được lấy từ [7]. Ở Ví dụ 3.2, ta xét một bài toán quy hoạch lồi 3 mục tiêu, được trích từ [17]. Ở Ví dụ 3.3, ta xét một bài toán quy hoạch phân thức tuyến tính.

Các kết quả trong Ví dụ 3.1 – 3.3 được cài đặt trên laptop Macbook Pro 2016 2GHz Intel Core i5, RAM 8 GB, thuật toán được viết trên Matlab R2016a.

Ví dụ 3.1. Xét bài toán (QMOP) sau

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & f_1(x) & = \dfrac{x_1+1}{-x_1^2+3x_1-x_2^2+3x_2+3.50}, \\ & f_2(x) & = \dfrac{x_1^2-2x_1+x_2^2-8x_2+20.00}{x_2}, \\ \text{v.đ.k.} & x_1, x_2 \in \mathbb{R}, & \\ & 2x_1+x_2 & \leq 6, \\ & 3x_1+x_2 & \leq 8, \\ & x_1-x_2 & \leq 1, \\ & x_1, x_2 & \geq 1. \end{array}$$

Dễ thấy $f_1(x)$ và $f_2(x)$ đều là các hàm phân thức lồi, tập chấp nhận được là một tập lồi đa diện nên bài toán trên là một quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt.

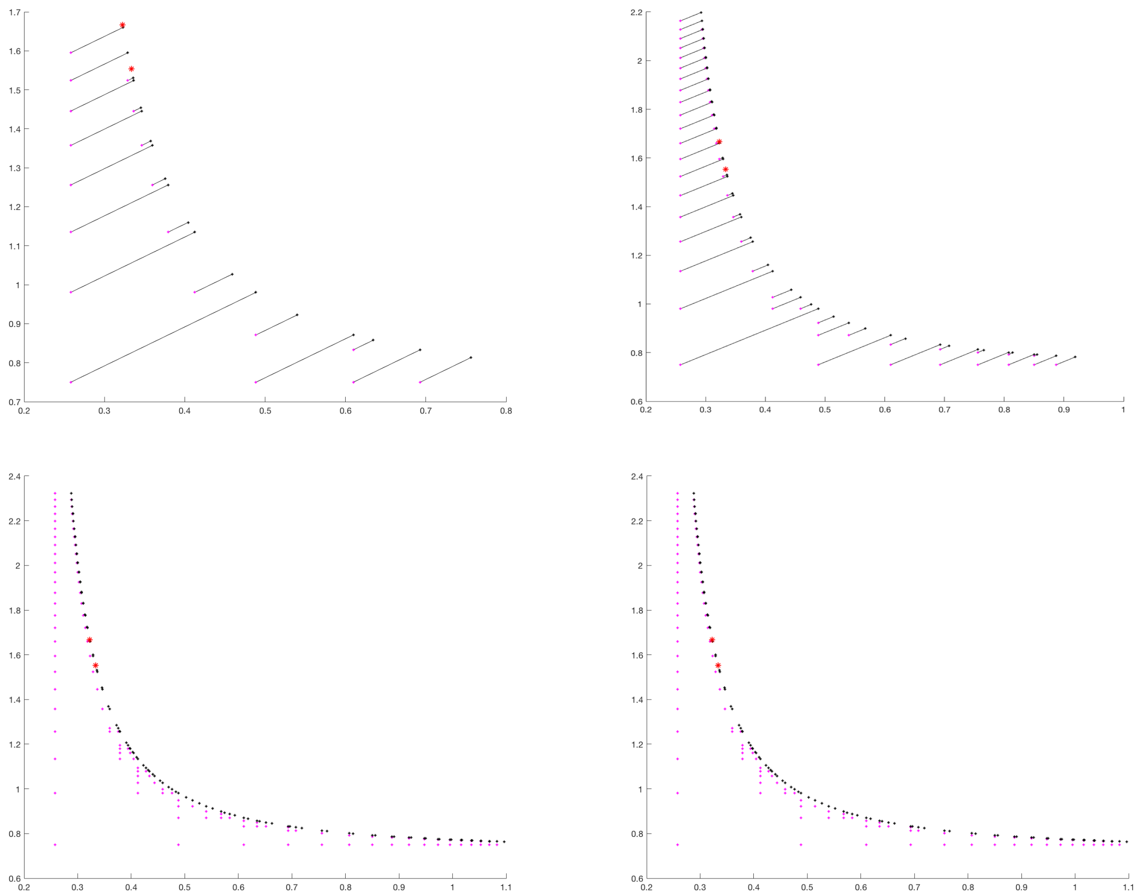
Với $\varepsilon = 0.1$, $\hat{d} = (1,1)$, thuật toán dừng lại sau 19 vòng lặp. Ta thu được tập EO gồm 19 điểm hữu hiệu yếu xấp xỉ ngoài và tập EY bao gồm 19 điểm hữu hiệu yếu. Kết quả tính toán được thể hiện ở Hình 3.1.

Ta so sánh kết quả tính toán với các giá trị ε khác nhau trong Bảng

3.1, trong đó T, V, C lần lượt là thời gian tính toán trung bình với 5 lần chạy (giây), số lượng điểm hữu hiệu yếu tương ứng với tập đỉnh của Y^{in} và số lượng đa hộp đảo xấp xỉ ngoài tương ứng với các đỉnh của Y^{out}.

Bảng 3.1: Kết quả tính toán ở Ví dụ 3.1

ε	T	V	C
0.1	1.570279	19	10
0.05	2.254596	55	28
0.02	3.019744	110	55
0.01	3.863708	170	84



Hình 3.1: Phân bố của các điểm hữu hiệu yếu trên tập ảnh trong Ví dụ 3.1 trong trường hợp $\varepsilon = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01$. Các điểm màu tím ký hiệu cho các đỉnh trong tập V^k, các điểm màu đen ký hiệu cho các điểm hữu hiệu yếu tìm được trên tập ảnh. Hai điểm ký hiệu hình sao màu đỏ trong hình là hai điểm hữu hiệu yếu được tìm ra bằng thuật toán giải quy hoạch tích ở [7].

Bảng 3.2: Kết quả tính toán ở Ví dụ 3.2

ε	T	V	C
2400	1.832126	22	14
1200	4.163828	163	103
600	150.701176	1176	737

Ví dụ 3.2. Ta xét bài toán (QMOP) sau

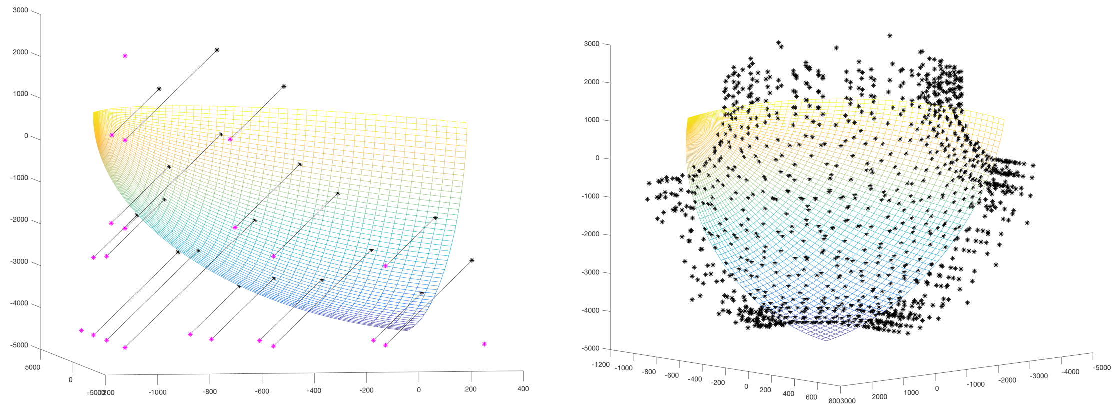
$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & f_1(x) & = & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 10x_2 - 120x_3, \\ & f_2(x) & = & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 80x_1 - 448x_2 + 80x_3, \\ & f_3(x) & = & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 448x_1 + 80x_2 + 80x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{v.đ.k.} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & \leq & 100, \\ & 0 & \leq & x_1 \leq 10, \\ & 0 & \leq & x_2 \leq 10, \\ & 0 & \leq & x_3 \leq 10. \end{array}$$

Ở bước khởi tạo, ta tìm được $l = (-1100, -4380, -4380)$ bằng cách giải các quy hoạch lồi (P(i)), $i \in \{1, 2, 3\}$. Như đã đề cập ở chương 3, thay vì tìm u, ta tìm $\hat{y} = (473.2051, 1685.6406, 1685.6406)$.

Đặt $b = (-1110, -4390, -4390) < l, d = (2000, 2000, 2000) \geq \hat{y}$, và chọn một hướng dương $\hat{d} = (0.2, 1, 1) > 0$.

Ta so sánh kết quả tính toán với các giá trị ε khác nhau trong Bảng 3.2, trong đó T, V, C được hiểu giống như trong Bảng 3.1. Tập các đỉnh hữu hiệu yếu tìm được được thể hiện ở Hình 3.2.



Hình 3.2: Phân bố của các điểm hữu hiệu yếu trên tập ảnh trong Ví dụ 3.2 trong trường hợp ε lần lượt là 2400 và 600. Các điểm màu tím ký hiệu cho các đỉnh trong tập V^k, các điểm màu đen ký hiệu cho các điểm hữu hiệu yếu tìm được trên tập ảnh.

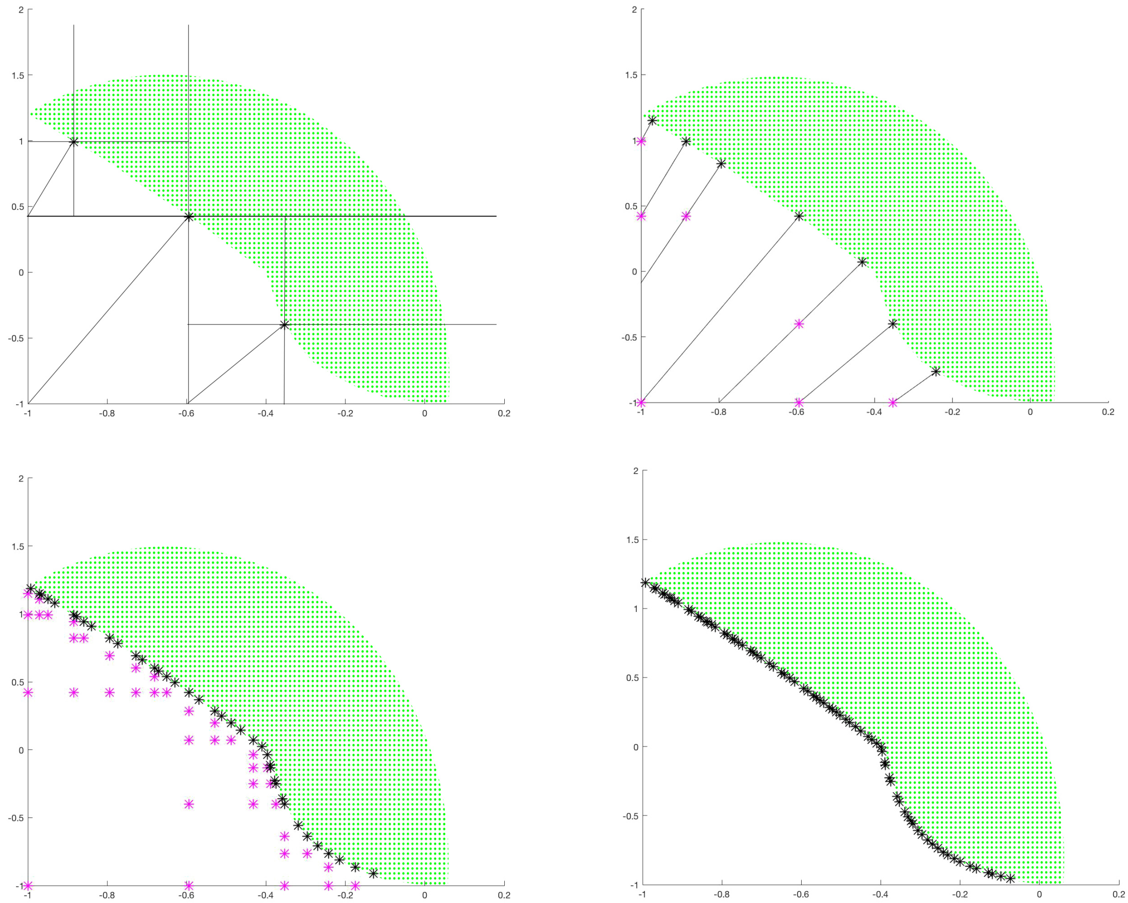
Ví dụ 3.3. Xét bài toán (QMOP) sau

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & f_1(x) & = \dfrac{-x_1}{x_1+x_2}, \\[2ex]
 & f_2(x) & = \dfrac{3x_1-2x_2}{x_1-x_2+3} \\[1ex]
\text{v.đ.k.} & x_1, x_2 \in \mathbb{R} & \\
 & x_1 - 2x_2 & \leq \; 2, \\
 & -x_1 - 2x_2 & \leq \; -2, \\
 & -x_1 + x_2 & \leq \; 1, \\
 & x_1 & \leq \; 6.
\end{array}
$$

Ở bước khởi tạo, ta tìm được $l = (-1, -1)$ bằng cách giải các quy hoạch lồi (LB(i)), $i \in \{1, 2\}$, bằng cách giải UB(i) ta tìm được $\hat{y} = (0, 2.6)$.

Đặt $b = (-2, -4) < l, d = (0, 2.6) \geq \hat{y}$, và chọn $\hat{d} = (1, 1) > 0$.

Ta so sánh kết quả tính toán với các giá trị ε khác nhau trong Bảng 3.3, trong đó T, V, C được hiểu giống như trong Bảng 3.1. Tập các đỉnh hữu hiệu yếu được thể hiện ở Hình 3.3.



Hình 3.3: Phân bố của các điểm hữu hiệu yếu trên tập ảnh trong Ví dụ 3.3 với $\varepsilon = 1, 0.5, 0.1, 0.05$

Bảng 3.3: Kết quả tính toán ở Ví dụ 3.3

ε	T	V	C
0.1	1.832126	35	18
0.05	2.136981	67	34
0.025	2.845096	117	59
0.0125	2.845096	231	116

Chương 4

Bài toán quy hoạch tích tựa lồi chặt (QMP)

Dựa trên mối quan hệ giữa hai bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt và bài toán quy hoạch tích tương ứng, chương này đề xuất một thuật toán xấp xỉ ngoài trên không gian ảnh để giải bài toán quy hoạch tích tựa lồi chặt. Thuật toán này được xây dựng như một ứng dụng của thuật toán xấp xỉ ngoài bằng đa hộp đảo *Solve(QMOP)* đã đưa ra ở Chương 3 để giải bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP).

4.1 Phát biểu bài toán

Bài toán quy hoạch tích tựa lồi chặt được phát biểu như sau

$$\min \prod_{j=1}^{p} f_j(x), \qquad \text{v.đ.k. } x \in X, \tag{QMP}$$

trong đó:

- ◇ $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p$ là các hàm tựa lồi chặt;
- ◇ $X \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi compact khác rỗng.

Như thường lệ, bài toán (QMP) được nghiên cứu với giả thiết

$$f_j(x) > 0, j = 1, 2, \dots, p, \ \forall x \in X. \tag{*}$$

Đây là một lớp bài toán tối ưu toàn cục khó và thú vị nên đã thu hút sự quan tâm đặc biệt của nhiều tác giả. Nó có liên quan chặt chẽ với bài toán tối ưu trên tập hữu hiệu và có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khác nhau như kinh tế tài chính, tối ưu hóa quy trình sản xuất, tối ưu danh mục đầu tư, thiết kế chip VLSI,.... Đây là bài toán NP-khó, ngay cả trong trường hợp $p = 2$ và X là một tập lồi đa diện khác rỗng. Hiện tại đã có khá nhiều các giải thuật để giải bài toán (QMP). Hầu hết trong số đó chỉ xét trường hợp X là một tập lồi đa diện và hàm mục tiêu trong đó f_j là tuyến tính, một số khác xử lý với bài toán hàm mục tiêu là hàm lồi. Cho đến thời điểm hiện tại, có khá ít công trình được xây dựng để giải trong trường hợp hàm mục tiêu là phi tuyến. Trong chương này, ta sẽ đề xuất một kỹ thuật xấp xỉ ngoài dựa trên Thuật toán *Solve(QMOP)* để giải bài toán (QMP).

Xét bài toán tương đương với (QMP) sau:

$$\min \varphi(y) = \prod_{j=1}^{p} y_j, \qquad \text{v.đ.k. } y \in Y, \tag{QMP$_Y$}$$

trong đó $Y = f(X)$.

Bổ đề 4.1. *Giá trị tối ưu của bài toán (QMP) và bài toán (QMP$_Y$) là bằng nhau. Hơn nữa, nếu y^* là một nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán (QMP$_Y$), thì $y^* \in Y_{WE}$ và mọi $x^* \in X$ sao cho $f(x^*) \leq y^*$ là một nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán (QMP).*

Bổ đề trên là hệ quả trực tiếp từ định nghĩa của (QMP) và (QMP$_Y$).

Nhắc lại rằng, $Y^+ = Y + \mathbb{R}^p_+$, $B^0 = [b, d]$ và $Y^\diamond = Y^+ \cap (d - \mathbb{R}^p_+)$. Theo giả thiết (*), suy ra $Y^+ \subset \text{int}\mathbb{R}^p_+$. Trong thuật toán xấp xỉ ngoài *Solve(QMOP)*, từ bước khởi tạo B^0 đến khi xây dựng dãy đa hộp đảo $\{B^k\}$, ngoài việc xây dựng được tập xấp xỉ ngoài, ta còn có thể xác định được hai dãy các cận trên và cận dưới cho (QMP$_Y$). Từ đó ta có thể xây dựng một thuật toán xấp xỉ ngoài để tìm được giá trị tối ưu xấp xỉ cho bài toán (QMP).

Chọn ε là một số dương nhỏ. Xét $\bar{y} \in Y_{WE} \subset Y$. Rõ ràng $\bar{\alpha} = \varphi(\bar{y})$ là một cận trên cho bài toán (QMP$_Y$). Điểm $\bar{y}$ được gọi là một nghiệm ε-tối ưu cho bài toán (QMP$_Y$) nếu tồn tại một cận dưới $\bar{\beta}$ cho bài toán trên sao cho $\bar{\alpha} - \bar{\beta} \leq \varepsilon$. Từ Bổ đề 4.1, nếu tồn tại một điểm $\bar{x}$ thỏa mãn $f(\bar{x}) \leq \bar{y}$, trong đó $\bar{y}$ là một nghiệm tối ưu ε-xấp xỉ cho bài toán (QMP$_Y$), thì nó là một nghiệm ε-tối ưu cho bài toán (QMP).

Ta có thể xác định cận trên và cận dưới cho bài toán (QMP$_Y$) khi tìm được đa hộp đảo xấp xỉ B^k ở vòng lặp thứ k như sau

- *Cận dưới.* Ở vòng lặp thứ k, vì $B^k \supseteq Y^\diamond \supseteq Y$, ta có thể xác định cận dưới β_k như sau
$$\beta = \min\{\varphi(y) : y \in B^k\}.$$
Hơn nữa, vì hàm $\varphi(y)$ là liên tục, đơn điệu tăng nên theo Định lý 1.4, để tính β_k, ta chỉ cần xét các giá trị của hàm φ tại các đỉnh chính quy của B^k, nghĩa là
$$\beta_k = \min\{\varphi(y) : y \in V^k\}.$$
Chú ý rằng dãy $\{\beta_k\}$ là không giảm vì $B^{k+1} \subseteq B^k$.

◇ *Cận trên.* Tập $Y^{in} := N_d^r(EY)$, trong đó EY được xây dựng ở Bước 2 của Thuật toán *Solve(QMOP)*, là một xấp xỉ trong của $Y^\diamond$. Do đó, ở vòng lặp thứ k, vì hàm $\varphi(y)$ là liên tục, đơn điệu tăng nên
$$\alpha_k = \min\{\varphi(y) : y \in Y^{in}\} = \min\{\varphi(y) : y \in EY\}$$
sẽ cho một cận trên của (QMP$_Y$). Rõ ràng dãy $\{\alpha_k\}$ là không tăng vì ở mỗi vòng lặp các điểm mới được thêm vào EY trước khi thuật toán dừng.

4.2 Thuật toán xấp xỉ ngoài giải bài toán (QMP)

Dưới đây mà mô tả thuật toán giải bài toán (QMP) dựa trên thuật toán *Solve(QMOP)*.

Thuật toán *Solve(QMP)*:

Bước 0 (khởi tạo). Chọn $\varepsilon > 0$ và $\hat{d} > 0$. Xác định hai điểm b, d. Đặt $B^0 = \emptyset$ và $V^0 = \{b\}$.

Đặt $\alpha_0 = \varphi(d)$ (cận trên đầu tiên), $EY = \emptyset$ and $k = 1$.

Bước 1. Xác định giá trị tối ưu $\beta_k = \min\{\varphi(y) : y \in V^k\}$ tương ứng với một nghiệm tối ưu $v^k \in V^k$ (sao cho $\beta_k = \varphi(v^k)$).

Bước 2. Giải bài toán $(P(v^k))$ để tìm một nghiệm tối ưu (x^k, t^k).

Đặt $y^k = f(x^k)$, $w^k = v^k + t_k\hat{d}$ và $EY = EY \cup \{y^k\}$. Tính toán $\alpha^k = \min\{\varphi(y) : y \in EY\}$ tương ứng với $\bar{y}^k \in EY$ sao cho $\alpha_k = \varphi(\bar{y}^k)$.

Bước 3. **If** $\alpha^k - \beta^k \leq \varepsilon$ **then** Thuật toán dừng. Khi đó, $\bar{y}^k$ là một nghiệm ε-xấp xỉ cho bài toán (QMP_Y) tương ứng với $\bar{x}^k$ là một nghiệm ε-xấp xỉ cho bài toán (QMP).

Else,

- ◇ Xác định B^{k+1} và V^{k+1} bằng cách cắt B^k bởi $(v^k - \text{int}\mathbb{R}^p_+)$;
- ◇ Loại bỏ các đỉnh không thuộc hộp $[b, d]$;
- ◇ Loại bỏ các đỉnh không chính quy bằng thủ tục RIV(V^{k+1});
- ◇ Đặt $k = k + 1$ và quay lại Bước 1.

Trong đó thủ tục RIV(V^{k+1}) đã được trình bày ở Mục 3.2.

Dưới đây ta xem xét tính hội tụ của thuật toán trên.

Định lý 4.1. *Nếu $\varepsilon > 0$, thuật toán sẽ dừng lại sau một số vòng lặp hữu hạn và ta thu được một nghiệm ε-xấp xỉ cho bài toán (QMP$_Y$). Nếu $\varepsilon = 0$, một trong hai khẳng định sau đây là đúng:*

i) Thuật toán dừng lại sau một số bước lặp hữu hạn và cho ta một nghiệm tối ưu chính xác cho bài toán (QMP$_Y$);

ii) Thuật toán sinh ra một chuỗi $\{\bar{y}^k\}$ sao cho $\{\varphi(\bar{y}^k)\}$ hội tụ về giá trị tối ưu của bài toán (QMP$_Y$).

Chứng minh. Trước tiên ta xét trường hợp $\varepsilon > 0$. Theo cách xác định các cận α_k và β_k, ta có

$$0 \leq \alpha_k - \beta_k = \varphi(\bar{y}^k) - \varphi(v^k) \leq \varphi(y^k) - \varphi(v^k).$$

Do φ là hàm tăng và $y^k \leq w^k$, ta suy ra

$$0 \leq \alpha_k - \beta_k \leq \varphi(w^k) - \varphi(v^k).$$

Do φ liên tục, áp dụng Bổ đề 3.5, để tìm một $k \geq 0$ nào đó sao cho $\varphi(w^k) - \varphi(v^k) \leq \varepsilon$. Dễ thấy thuật toán dừng ở vòng lặp thứ k và $\bar{y}^k$ là một nghiệm ε-xấp xỉ của bài toán (QMP$_Y$).

Trong trường hợp $\varepsilon = 0$ nếu thuật toán dừng lại ở vòng lặp thứ k với $k \leq 0$ nào đó, thì $\varphi(\bar{y}^k) - \varphi(v^k) = 0$, suy ra $\bar{y}^k$ là một nghiệm tối ưu của bài toán (QMP$_Y$). Nếu thuật toán không dừng lại, do Bổ đề 3.5, dãy $\{\varphi(\bar{y}^k) - \varphi(v^k)\}$ hội tụ về 0, suy ra $\lim_{k\to\infty} \varphi(\bar{y}^k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(v^k)$. Do đó dãy $\{\varphi(\bar{y}^k)\}$ hội tụ về nghiệm tối ưu của (QMP$_Y$). Định lý được chứng minh. □

4.3 Thử nghiệm tính toán

Ví dụ 4.1. Xét bài toán quy hoạch tích sau

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x)f_2(x) \\ \text{v.đ.k.} \quad & Ax \le b, \end{aligned}$$

trong đó

$$f_1(x) = \frac{x_1 + 1}{-x_1^2 + 3x_1 - x_2^2 + 3x_2 + 3.50}, f_2(x) = \frac{x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 20.00}{x_2},$$

và

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dễ thấy $f_1(x), f_2(x)$ là các hàm phân thức lồi, nhận giá trị dương trên tập chấp nhận được; tập chấp nhận được là tập lồi đa diện nên ta có thể áp dụng thuật toán *Solve(QMP)* để tìm nghiệm của bài toán này.

Bước khởi tạo.

Đặt $\varepsilon = 0.1$. Giải (LB(i)), $i \in \{1, 2\}$, ta thu được $l = (0.2581, 0.7500)$. Đặt $b = (0.0581, 0.0500) < l$, $d = (1.0581, 0.9500) > \hat{y}$ và $\hat{d} = (1, 1)$. Đặt $B^0 = \emptyset$ và $V^0 = \{b\}$.

Vòng lặp k = 0.

Bảng 4.1: Kết quả tính toán ở Ví dụ 4.1

k	y^k	α_k	β_k	$\alpha_k - \beta_k$
0	(0.8089, 0.8009)	0.647829	0.002903	0.644926
1	(1.3333, 0.7500)	0.647829	0.040446	0.607383
2	(0.4074, 1.1502)	0.468535	0.046501	0.422033
3	(0.5342, 0.9277)	0.468535	0.326241	0.142293
4	(0.4770, 0.9973)	0.468535	0.377918	0.090616

Bước 1. Xác định giá trị tối ưu $\beta_0 = \min\{\varphi(y), y \in V^0\} = 0.0029$ và nghiệm tối ưu $v^0 = (0.0581, 0.0500)$.

Bước 2. Giải (P(v^0)), ta thu được nghiệm tối ưu

$$(x^0, t) = (1.0000, 3.7973, 0.7509).$$

Khi đó, $y^0 := f(x^0) = (0.8089, 0.8009)$, $w^0 = (0.8089, 0.8009)$ và $EY = \{y^0\}$. Tính được $\alpha_0 = \varphi(y^0) = 0.6478$ và $\bar{y}^0 = y^0$.

Bước 3. Vì $\beta_0 - \alpha_0 = 0.644926 > 0.1$, nên đặt

$$V^1 = (V^0 \setminus v^0) \cup \{v^0 - (w_i^0 - v_i^0)e_i, i = 1, \ldots, p \mid w_i^0 \in [b, d]\},$$

Thuật toán dừng sau 5 bước lặp. Nghiệm ε-xấp xỉ của (QMP$_Y$) là $\bar{y}^4 = (0.4770, 0.9973)$ tương ứng với nghiệm tối ưu của (QMP) là $\bar{x}^4 = (1.0000, 3.1854)$ và giá trị ε-xấp xỉ là $\varphi(\bar{y}^4) = 0.4686$. Kết quả tính toán cho từng bước lặp được thể hiện ở Bảng 4.1.

Kết luận chung

Đồ án này nghiên cứu bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP), cùng với bài toán tối ưu toàn cục quan trọng liên quan gần gũi với bài toán (QMOP) là bài toán quy hoạch tích và đề xuất các thuật toán mới giải các bài toán này.

Chương 1 đã trình bày một số khái niệm cơ sở về các lớp hàm, như hàm tựa lồi, hàm tựa lõm, hàm tựa lồi chặt, hàm phân thức lồi, ... cùng nhiều ví dụ minh họa và tính chất quan trọng. Các khái niệm về tập chuẩn, tập chuẩn đảo, đa hộp, đa hộp đảo đã được trình bày ở Mục 1.3 cùng nhiều tính chất thú vị liên quan.

Chương 2 khảo sát một ví dụ trong thực tế cần giải quyết bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt về mô hình tối ưu danh mục đầu tư trái phiếu được đề xuất bởi [11]. Ở Mục 2.2, chúng tôi giới thiệu mô hình toán học của bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt cùng một số khái niệm và kết quả cơ bản liên quan. Chương này cũng đưa ra điều kiện cho phép nhận biết các nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (QMOP) và khảo sát các cấu trúc tập nghiệm hữu hiệu, nghiệm hữu hiệu yếu, giá trị hữu hiệu và tập giá trị hữu hiệu yếu của bài toán nói trên.

Chương 3 đã đề xuất mới một thuật toán xấp xỉ ngoài giải bài toán quy hoạch đa mục tiêu tựa lồi chặt (QMOP) sử dụng đa hộp đảo trên không gian ảnh để xác định tập nghiệm hữu hiệu yếu θ-xấp xỉ của bài toán (QMOP). Tính hội tụ của thuật toán cũng đã được chứng minh đầy đủ. Để minh họa, Mục 3.4 đưa ra nhiều tính toán thử nghiệm giải số các bài toán (QMOP) cụ thể.

Trong Chương 4, chúng tôi nghiên cứu bài toán quy hoạch tích các hàm tựa lồi chặt trên tập lồi (QMP) và đề xuất thuật toán với kỹ thuật xấp xỉ ngoài bằng đa hộp đảo để giải một bài toán tương ứng (QMP_Y) trên không gian ảnh. Thuật toán này được xây dựng dựa vào mối quan hệ giữa nghiệm tối ưu của bài toán (QMP_Y) và tập giá trị hữu hiệu yếu Y_{WE} của bài toán (QMOP). Khi thuật toán kết thúc, ta nhận được nghiệm tối ưu của cả hai bài toán (QMP) và (QMP_Y). Tiếp theo, tính hội tụ của thuật toán được chứng minh. Một ví dụ số tính toán thử nghiệm được trình bày qua từng bước nhằm minh họa tính hiệu quả của thuật toán.

Mặc dù đã nỗ lực hết sức, tuy nhiên trong khoảng thời gian cho phép, việc nghiên cứu và trình bày không thể tránh khỏi nhầm lẫn thiếu sót, tôi mong nhận được sự giúp đỡ đóng góp của thầy cô và bạn bè để đồ án được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hà Nội, ngày 07/06/2017

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Thị Bạch Kim, *Giáo trình các phương pháp tối ưu: Lý thuyết và thuật toán*, Nhà xuất bản Bách Khoa, Hà Nội, 2014.

Tiếng Anh

[2] Avriel, M., Diewert, W.E., Schaible, S., Zang, I., *Generalized concavity*, Plenium Press, New York, 1988.

[3] Benson, H.P., Boger, G.M., "Multiplicative programming problems: analysis and efficient point search heuristic", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 94, 1997, 487 – 510.

[4] Benoist, J., "Contractibility of the efficient set in strictly quasi-concave vector maximization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 110(2), 2001, 325 – 336.

[5] Benson, H.P., "An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 13, 1998, 1 – 24.

[6] Benson, H.P., "On the global optimization of sums of linear fractional functions over a convex set", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 121(1), 2004, 19 – 39.

[7] Benson, H. P., "A global optimization approach for generating efficient points for multiobjective concave fractional programs", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol 13(1), 2005, 15 – 28.

[8] Ehrgott, M., Shao, L., Schobel, A., "An Approximation Algorithm for Convex Multi-objective Programming Problems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 50, 2011, 397 – 416.

[9] Gourion, D., Luc, D.T., "Finding efficient solutions by free disposal outer approximation", *SIAM Journal on Optimization*, Vol 20, 2010, 2939 – 2958.

[10] Greenberg, H.J., Pierskalla, W.P., "A review of quasi-convex funtions", *Operations Research*, Vol 19, 1971, 1553 – 1570.

[11] Konno, H., Inori, M., "Bond portfolio optimization by bilinear fractional programming", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol 32(2), 1989, 143 – 158.

[12] Luc, D.T., "Connectedness of the Efficient Point Sets in Quasiconcave Vector Maximization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 122, 1987, 346 – 354.

[13] Luc, D.T., *Theory of Vector Optimization*, Springer Berlin Heidelberg, Germany, 1989.

[14] Luc, D.T., Phong, T.Q., Volle, M., "Scalarizing functions for generating the weakly efficient solution set in convex multiobjective problems", *SIAM Journal on Optimization*, Vol 15, 2005, 987 – 1001.

[15] Luc, D.T.: *Generalized Convexity in Vector Optimization, Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, Springer, New York, 2005, 195 – 236.

[16] Mangasarian O.L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[17] Thang, T.N., Luc, D.T., Kim, N.T.B., "Solving generalized convex multiobjective programming problems by a normal direction method", *Optimization*, Vol 65(12), 2016, 2269 – 2292.

[18] Tuy, H., "Normal sets, polyblocks and monotonic optimization", *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol 27, 1999, 277 – 300.

[19] Tuy, H., "Monotonic Optimization: Problems and Solution Approaches", *SIAM Journal on Optimization*, Vol 2, 2000, 464 – 494.

[20] Yu, P.L., *Multiple-criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum Press, New York, 1985.